OPCIÓN A

17_mod1_sep_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1'5 puntos) Justifique cuales de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado: A^2 $A - B$ $A \cdot B$ $A \cdot B^t$.

b) (1 puntos) Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{2x3}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$.

a)

Justifique cuales de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

A^2 $A - B$ $A \cdot B$ $A \cdot B^t$.

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera matriz tiene que coincidir con el número de filas de la segunda matriz, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz; y para poder sumar (restar) matrices deben de tener el mismo orden.

$A^2 = A_{2x\mathbf{3}} \cdot A_{\mathbf{2}x3}$, **no se puede operar** por lo expresado antes.

$A_{2x3} - B_{3x2}$, **no se puede operar** por lo expresado antes.

$A_{2x\mathbf{3}} \cdot B_{\mathbf{3}x2}$, **si se puede operar** por lo expresado antes.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{2x\mathbf{3}} \cdot B^t_{\mathbf{2}x3}$, **no se puede operar** por lo expresado antes.

b)

Halle la matriz X tal que $A^t + B \cdot X = 3B$.

Como la matriz B no es cuadrada, no tiene matiz inversa, y el ejercicio se resuelve operando las matrices e igualándolas.

$A^t + B \cdot X = 3B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, para que esta ecuación tenga sentido la matriz X tiene que ser de orden 2x2, porque $B \cdot X$ tiene que tener de orden 3x2, luego para poder multiplicar ha de ser 2x2.

De $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos:

c = -1
d = 3
a = 3
b = -1
a+c = 2; 3 – 1 = 2. Cierto
b+d = 2; 3 – 1 = 2. Cierto.

La matriz pedida es X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

17_mod1_sep_EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.

a) (1 punto) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa x = -1 y un punto de inflexión en el punto de abscisa x = -2.
b) (1'5 puntos) Para a = 6 y b = 9, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$.
a)
Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa x = -1 y un punto de inflexión en el punto de abscisa x = -2.

Como f tiene un mínimo en el punto de abscisa x = -1, tenemos **f '(-1) = 0.**
Como f tiene un punto de inflexión en x = -2, tenemos **f ''(-2) = 0.**
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$.

De $f''(-2) = 0 \rightarrow 6(-2) + 2a = 0 \rightarrow 2a = 12$, de donde **a = 6.**
De $f'(-1) = 0 \rightarrow 3(-1)^2 + 2(6)(-1) + b = 0 \rightarrow b - 9 = 0$, luego **b = 9.**
b)
Para a = 6 y b = 9, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

Me piden la monotonía, es decir el estudio de la primera derivad f '(x)

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$; $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$.

De $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0 = x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$, por tanto las soluciones son x = -1 y x = -3, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-4) = 3(-4)^2 + 12(-4) + 9 = 9 > 0$, luego f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-3)$.

Como $f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3 < 0$, luego f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-3,-1)$.

Como $f'(0) = 3(0)^2 + 12(0) + 9 = 9 > 0$, luego f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-1,+\infty)$.

Por definición x = -3 es un máximo relativo, que vale $f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) = 0$.
Por definición x = -1 es un mínimo relativo, que vale $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) = -4$.
Para ver un esbozo, veamos su comportamiento en $\pm\infty$.

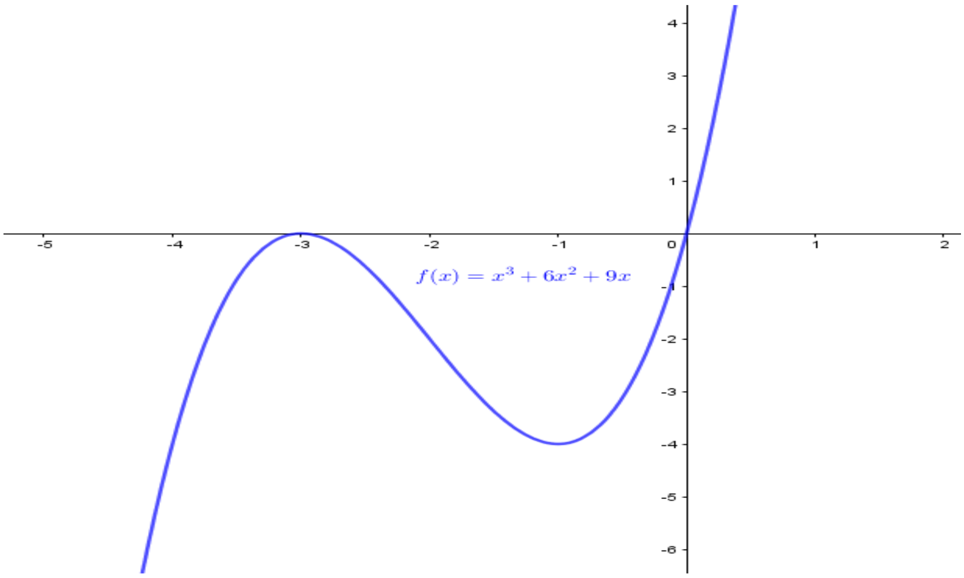
Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} \left((-x)^3 + 6(-x)^2 + 9(-x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left((-x)^3\right) = (-\infty)^3 = -\infty.$, luego cuando x tiende a $-\infty$, la función f tiende a $-\infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3 + 6x^2 + 9x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = (+\infty)^3 = +\infty.$, luego cuando x tiende a $+\infty$, la función f tiende a $+\infty$.

Veamos los cortes con los ejes:

Para x = 0, tenemos $f(0) = (0)^3 + 6(0)^2 + 9(0) = 0$, y el punto de corte con el eje de ordenadas OY es (0,0).
Para f(x) = 0, tenemos $x^3 + 6x^2 + 9x = 0 = x\cdot(x^2 + 6x + 9) = x\cdot(x + 3)^2 = 0$, de donde x = 0 y x = -3, por tanto los puntos de corte con el eje de abscisas son (-3,0) y (0,0).

Teniendo en cuenta también el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos, un esbozo de la gráfica es:



17_mod1_sep_EJERCICIO 3 (A)

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera de México y que solo el 5% de los que no lo votaron lo apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) (0'75 puntos) Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) (0'75 puntos) Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

Solución

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera de México y que solo el 5% de los que no lo votaron lo apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que lo votaron se elige una persona al azar.

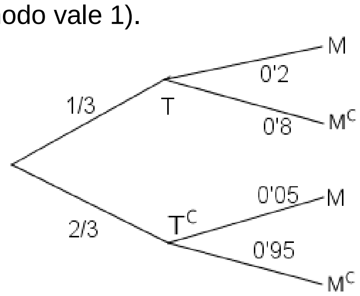
a)

¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

Sean los sucesos T = "votante de Trump", T^C = "no votante de Trump", M = "apoya la construcción del muro" y M^C = "no apoya la construcción del muro"

Nos dan p(T) = 5000/15000 = 1/3, p(M/T) = 20% = 0'2, p(M/ T^C) = 5% = 0'05%, ….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

p(M) = $p(T).p(M/T) + p(T^C).p(M/T^C) = (1/3)\cdot(0'2) + (2/3)\cdot(0'05)$ **= 1/10 = 0'1**.

b)

Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿Cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(T^C/M) =} \frac{p\left(T^C \cap M\right)}{p(M)} = \frac{p\left(T^C\right).p(M/T^C)}{p(M)} = \frac{(2/3)\cdot(0'05)}{0'1} \mathbf{= 1/3 \cong 0'33333}.$$

c)

Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

Me piden **p(T ó M) = p(T∪M) =** p(T) + p(M) – p(T∩M) = p(T) + p(M) – p(T)·p(M/T) =
= (1/3) + 0'1 - (1/3)·(0'2) = 11/30 ≅ **0'366667**

17_mod1_sep_EJERCICIO 4 (A)

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores: 46 38 59 29 34 32 38 21 44 34.

a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 95%, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98%.

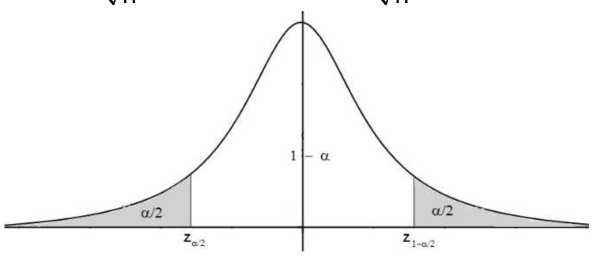
Solución

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores: 46 38 59 29 34 32 38 21 44 34.

a)

Determine un intervalo de confianza, al 95%, para la vida media de dicha especie de tortugas.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Datos del problema: σ = 10; n = 10; media muestral $\overline{x}$ = (46+38+59+29+34+32+38+21+44+34)/10 = 37'5; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene y corresponden a 1'96, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(37'5 - 1'96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}, 37'5 + 1'96\cdot\frac{10}{\sqrt{10}}\right) \cong \mathbf{(31'3019, 43'6981)}$$

b)

Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98%.

Datos del problema: σ = 10; error = E = 5; nivel de confianza = 98% = 0'98 = 1 - α, de donde α = 1 – 0'98 = 0'02, con la cual α/2 = 0'02/2 = 0'01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'99 vemos que no viene, y la mas próxima es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33.

De el error es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'33\cdot 10}{5}\right)^2$ ≅ 21'71, tenemos que **el tamaño**

mínimo de la muestra es de n = 22 tortugas.

OPCION B

17_mod1_sep_EJERCICIO 1 (B)
a) (0'8 puntos) Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$x + y \le 3 \qquad 2x + y \ge 4 \qquad y \ge -1$

b) (0'25 puntos) Razone si el punto (2,1) pertenece al recinto anterior.
c) (1'2 puntos) Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función F(x,y) = 5x + 4y en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.
d) (0'25 puntos) Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

Solución

a) y b)
Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + y \le 3 \qquad 2x + y \ge 4 \qquad y \ge -1$
Razone si el punto (2,1) pertenece al recinto anterior.

Tenemos que ver si el punto (2,1) verifica todas las inecuaciones:
De $x + y \le 3$, tenemos $(2) + (1) \le 3$, lo cual **es cierto.**
De $2x + y \ge 4$, tenemos $2(2) + (1) \ge 4$, lo cual **es cierto.**
De $y \ge -1$, tenemos $(1) \ge -1$, lo cual **es cierto**, **por tanto el punto (2,1) pertenece al recinto.**

c)
Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función F(x,y) = 5x + 4y en ese recinto, indicando en que puntos se alcanzan.

Es un problema de programación lineal.

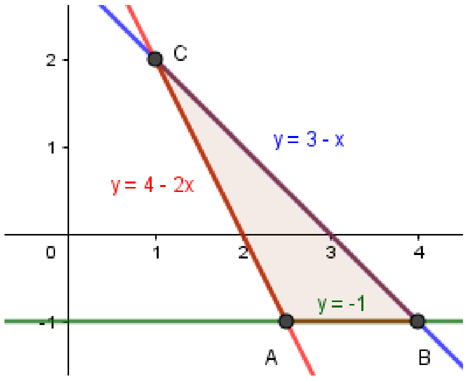
Función a optimizar es F(x,y) = 5x + 4y.
Restricciones: $x + y \le 3$; $2x + y \ge 4$; $y \ge -1$.

Las desigualdades $x + y \le 3$; $2x + y \ge 4$; $y \ge -1$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + y = 3$; $2x + y = 4$; $y = -1$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$x = 3 - x; \quad y = 4 - 2x; \quad y = -1.$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B y C de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -1$ e $y = 4-2x$, tenemos $-1 = 4 - 2x$, es decir $2x = 5$, luego $x = 2'5$, y el vértice es A(2'5,-1).
De $y = -1$ e $y = 3-x$, tenemos $-1 = 3 - x$, es decir $x = 4$, y el vértice es B(4,-1).
De $y = 4-2x$ e $y = 3 - x$, tenemos $4 - 2x = 3 - x \rightarrow 1 = x$, con lo cual $y = 3 - (1) = 2$ y el vértice es C(1,2).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(2'5,-1), B(4,-1) y C(1,2).

Veamos las soluciones óptimas de la función F(x,y) = 5x + 4y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(2'5,-1), B(4,-1) y C(1,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(2'5,-1) = 5(2'5) + 4(-1) **= 8'5**; **F_B(4,-1) =** 5(4) + 4(-1) **= 16**; F_C(1,2) = 5(1) + 4(2) = 13.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 16** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(4,-1),** y e**l mínimo absoluto de la función F en la región es 8'5** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(2'5,-1).**
d)
Razone si la función F puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

La respuesta es afirmativa, porque 8'5 ≤ 9 ≤ 16, es decir "9" se encuentra entre el mínimo absoluto 8'5 y el máximo absoluto 16.

17_mod1_sep_EJERCICIO 2 (B)

Se consideran las siguientes funciones $f(x) = \frac{5x - 16}{x}$ y $g(x) = x^2$.
a) (1 puntos) Determine la abscisa del punto donde se verifique f '(x) = g '(x).
b) (1'5 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa x=2 y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

Solución

Se consideran las siguientes funciones $f(x) = \frac{5x - 16}{x}$ y $g(x) = x^2$.
a)
Determine la abscisa del punto donde se verifique f '(x) = g '(x).

De $f(x) = \frac{5x - 16}{x}$, tenemos $f'(x) = \frac{5\cdot(x) - (5x - 16)\cdot 1}{x^2} = \frac{16}{x^2}$
De $g(x) = x^2$, tenemos g '(x) = 2x.
De f '(x) = g '(x), tenemos $\frac{16}{x^2} = 2x$, de donde $16 = 2x^3$, luego $x^3 = 8$, por tanto $x = \sqrt[3]{8} = 2$, **es decir la abscisa donde coinciden las derivadas es x = 2.**
b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa x = 2 y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

La recta tangente en x = 2 de f es "y - f(2)) = f '(1)·(x - 2)
Tenemos $f(x) = \frac{5x - 16}{x} \rightarrow f(2) = \frac{5(2) - 16}{2} = -3$, $f'(x) = \frac{16}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{16}{(2)^2} = 4$, por tanto la recta tangente pedida es **y - (-3) = 4·(x - 2)**, de donde **y = 4x - 11.**

La recta tangente en x = 2 de g es "y - g(2)) = g '(1)·(x - 2)
Tenemos $g(x) = x^2 \rightarrow g(2) = 2^2 = 4$, $g'(x) = 2x \rightarrow g'(2) = 2(2) = 4$, por tanto la recta tangente pedida es **y - (4) = 4·(x - 2)**, de donde **y = 4x - 4.**

Nos piden el corte de las recta tangentes y = 4x – 11 e y = 4x – 4, observamos que **las rectas tienen la misma pendiente, 4, por tanto son paralelas y no se cortan en ningún punto.**

17_mod1_sep_EJERCICIO 3 (B)

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.
a) (1'25 puntos) Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.
b) (1'25 puntos) Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Solución

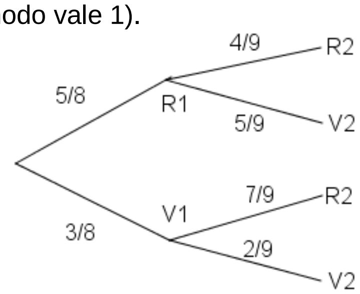
Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por dos bolas del otro color. A continuación se extrae una segunda bola.
a)
Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

Sean los sucesos R1 = "primera bola extraída es roja", V1 = "primera bola extraída es verde", R2 = "segunda bola extraída es roja" y V2 = "segunda bola extraída es verde".

Datos del problema: p(R1) = 5/8, como se añaden dos verdes y no se reemplaza una, la composición con 1ª roja es 4R y 5V, con lo cual p(R2/R1) = 4/9 y p(V2/R1) = 5/9.

Analogamente tenemos: si p(V1) = 3/8, como se añaden dos rojas y no se reemplaza una, la composición con 1ª verde es 7R y 2V, con lo cual p(R2/V1) = 7/9 y p(V2/V1) = 2/9.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

$$\mathbf{p(V2) =} p(R1).p(V2/R1) + p(V1).p(V2/V1) = (5/8)\cdot(5/9) + (3/8)\cdot(2/9) \mathbf{= 31/72 \cong 0'430556}.$$

b)
Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

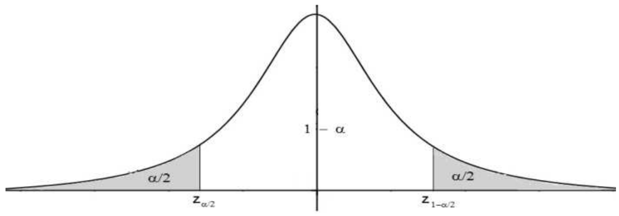
$$\mathbf{p(R1/R2) =} \frac{p(R1\cap R2)}{p(R2)} = \frac{p(R1).p(R2/R1)}{1 - p(V2)} = \frac{(5/8)\cdot(7/9)}{1 - (31/72)} \mathbf{= 35/41 \cong 0'85366}.$$

17_mod1_sep_EJERCICIO 4 (B)

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.
a) (1'25 puntos) Determine, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.
b) (1'25 puntos) Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0'2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 92'5% calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el *estimador* PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$), y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$ o $\hat{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la proporción es $\hat{p}$ *= (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E=* $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$*, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.
a)
Determine, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

Datos del problema: n = 100, $\hat{p} = \frac{25}{100}$ = 0'25, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 – 0'25 = 0'75, nivel de confianza = 95% = 0'95 = = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'25 - 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'25\cdot 0'75}{100}}, 0'25 + 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'25\cdot 0'75}{100}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'16513; 0'33457)**

b)
Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0'2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 92'5% calcule el tamaño mínimo de la muestra.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'2, $\hat{q}$ = 0'8, error = E ≤ 0'03, nivel de confianza = 92'5% = 0'925 = 1 - α, de donde α = 0'075, es decir $\alpha/2$ = 0'075/2 = 0'0375.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'0375 = 0'9625. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'9625 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'78.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'78)^2\cdot 0'2\cdot 0'8}{(0'03)^2}$ = 563'2711, por tanto **el tamaño mínimo de estudiantes de esa Universidad que hay que seleccionar es n = 564.**