Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales	(3)
Convocatoria:	

- **Se debe elegir sólo una de las opciones (A o B)**
- **Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos**

Convocatoria de Julio 2018

Opción A

1. De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Contesta justificadamente:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?.

El número X de teléfonos apagados sigue una distribución $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$. Como $np = 40 > 5$ y $n(1-p) = 360 > 5$, se puede aproximar por una normal $N\left(\frac{400}{10}, \sqrt{400 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}}\right) \approx N(40, 6)$. Entonces:

$$P(X \leq 40) = P(Z \leq 0) = 0{,}5$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?.

$$\begin{aligned} P(X = 40) \cong P(39{,}5 \leq X \leq 40{,}5) = P\left(\frac{39{,}5-40}{6} \leq Z \leq \frac{40{,}5-40}{6}\right) &= P(-0{,}08 \leq Z \leq 0{,}08) = \\ &= P(Z \leq 0{,}08) - P(Z \leq -0{,}08) = P(Z \leq 0{,}08) - (1 - P(Z \leq 0{,}08)) = \\ &= 2P(Z \leq 0{,}08) - 1 = 2 \cdot 0{,}5319 - 1 = 0{,}0638 \end{aligned}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?.

$$P(40 \leq X \leq 50) \cong P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{6}\right) = P(Z \leq 1{,}67) - P(Z \leq 0) = 0{,}9525 - 0{,}5 = 0{,}4525$$

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

   a) A partir de los datos de la muestra anterior calcula un intervalo de confianza al 95 % para la distancia media en km recorrida por un taxi en un día.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\mu \in \left[\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[240 + 1{,}96\frac{60}{\sqrt{96}}\right] = [240 \pm 12] = [228, 252]$$

   b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99 %

Para $1 - \alpha = 0{,}99$ se tiene que $z_{\alpha/2} = z_{0{,}995} = 2{,}58$. El intervalo de confianza es de la forma:

$$\mu \in \left[\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[240 + 2{,}58\frac{60}{\sqrt{n}}\right]$$

Para que el error sea menor que 10:

$$2{,}58\frac{60}{\sqrt{n}} = 10 \Rightarrow \sqrt{n} = 2{,}58\frac{60}{10} = 15{,}48 \Rightarrow n = 15{,}48^2 = 239{,}63 \cong 240$$

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

   a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.

b) El coste del espejo espejo es de 16,25 € el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24 % de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte que es de 85 €. ¿A cuánto asciende el total?

En primer lugar determinamos los puntos de corte:

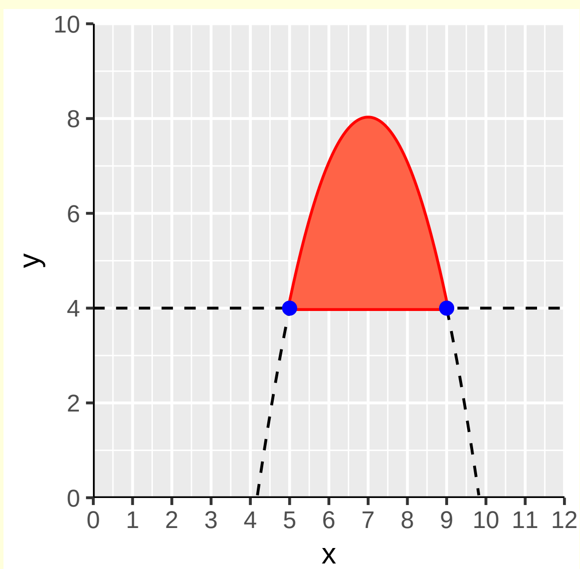
$$-x^2+14x-41=4 \Rightarrow -x^2+14x-45=0 \Rightarrow x=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 45}}{-2}=\frac{-14\pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=9 \end{cases}$$

El área buscada es entonces:

$$\int_5^9 \left(-x^2+14x-45\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+7x^2-45x\right]_5^9=-81+91{,}67=10{,}67\ m^2$$

Los gastos serán entonces:

Material	$10{,}67\,m^2\cdot 16{,}25$ €$/m^2$=	173,39 €
Mano de obra	$173{,}3875\cdot 0{,}24$ =	41,61 €
Transporte	85 €	85,00 €
TOTAL		300,00 €



4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar

la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

Sea n_{pf} el número de declaraciones que realiza a personas físicas y n_{pe} el número de las que realiza a pymes. La función objetivo es entonces:

$$Max\,300n_{pe} + 120n_{pf}$$

y las restricciones

$$\begin{aligned} 3n_{pf} + 6n_{pe} &\leq 360 \\ n_{pf} + 4n_{pe} &\leq 210 \\ n_{pf} &\geq 10 \\ n_{pe} &\geq 20 \end{aligned}$$

Determinamos los puntos críticos:

- Corte entre las rectas que definen las dos primeras restricciones:

$$\begin{cases} 3n_{pf} + 6n_{pe} & = 360 \\ n_{pf} + 4n_{pe} & = 210 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3n_{pf} - 6n_{pe} & = -360 \\ 3n_{pf} + 12n_{pe} & = 630 \end{cases} \Rightarrow\; 6n_{pe} = 270 \Rightarrow n_{pe} = 45$$

- Además $n_{pf} = 210 - 4n_{pe} = 210 - 4 \cdot 45 = 30$. Por tanto las dos primeras rectas se cortan en el punto $P_1\,(30,45)$.

- Corte de la segunda con la tercera es: $\begin{cases} n_{pf} + 4n_{pe} & = 210 \\ n_{pf} & = 10 \end{cases} \Rightarrow 10 + 4n_{pe} = 210 \Rightarrow n_{pe} = 50 \Rightarrow$ $P_2\,(10,50)$

- La tercera y la cuarta se cortan en $P_3\,(10,20)$

- Y la segunda y la cuarta:

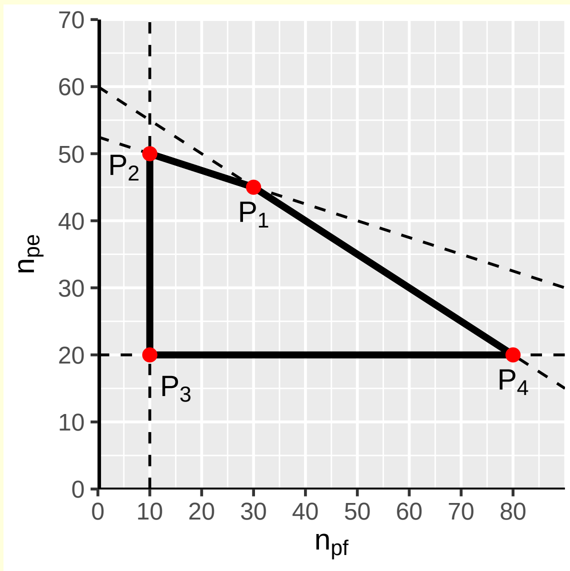
$$\begin{cases} 3n_{pf} + 6n_{pe} & = 360 \\ n_{pe} & = 20 \end{cases} \Rightarrow n_{pf} = (360 - 6 \cdot 20)/6 = 80 \Rightarrow P_4\,(80,20)$$

Evaluamos la función objetivo en los puntos críticos:

- En P_1 : $120 \cdot 30 + 300 \cdot 45 = 17100$
- En P_2 : $120 \cdot 10 + 300 \cdot 50 = 16200$
- En P_1 : $120 \cdot 10 + 300 \cdot 20 = 7200$
- En P_1 : $120 \cdot 80 + 300 \cdot 20 = 15600$

Por tanto el máximo nivel de ingresos se alcanza en P_1, es decir, cuando se hacen 45 declaraciones para pymes y 30 declaraciones a particulares. Dichos ingresos ascienden en ese caso a 17.100 €.

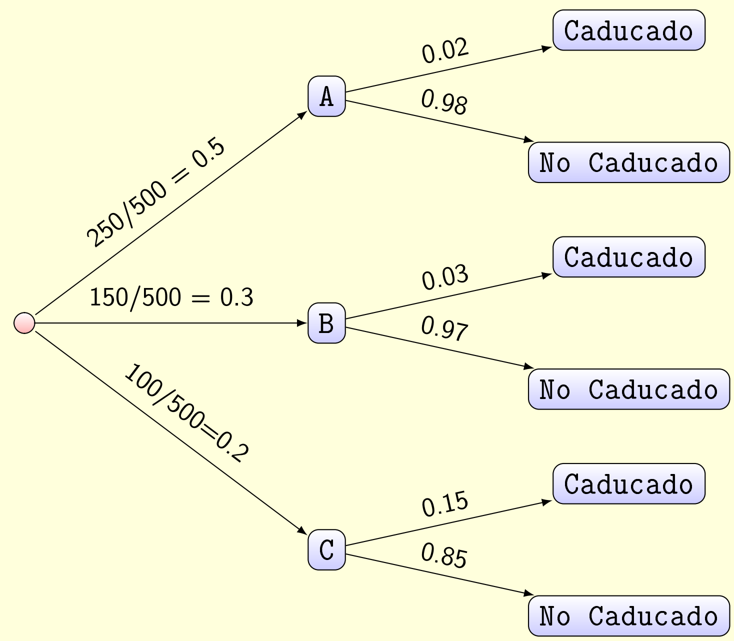
Gráfica de la región factible:



Opción B

1. En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2 % para la marca A, 3 % para la marca B y 15 % para la marca C. Se elige un yogur al azar:

   a) Dibuja un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.



   b) Calcula la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.

$$P(Cad) = P(A)\cdot P(Cad/A) + P(B)\cdot P(Cad/B) + P(C.)\cdot P(Cad/C) =$$
$$= \frac{250}{500} \cdot 0{,}02 + \frac{150}{500} \cdot 0{,}03 + \frac{100}{500} \cdot 0{,}15 = 0{,}049$$

   c) Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?.

$$P(A/Cad) = \frac{P(A) \cdot P(Cad/A)}{P(A) \cdot P(Cad/A) + P(B) \cdot P(Cad/B) + P(C.) \cdot P(Cad/C)} =$$
$$= \frac{\frac{250}{500} \cdot 0{,}02}{0{,}049} = 0{,}2041$$

2. Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre la ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años.

   a) Construye un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90 % la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.

   Como 1-α=0.9 el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. La proporción muestral es $\hat{p} = 0{,}36$. El intervalo de confianza es, pues:

$$\left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = [0{,}36 \pm 0{,}0526] = [0{,}3074, 0{,}4126]$$

   b) Con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0.03?

   El tamaño de muestra buscado debe ser tal que:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}03$$

   de donde se sigue que

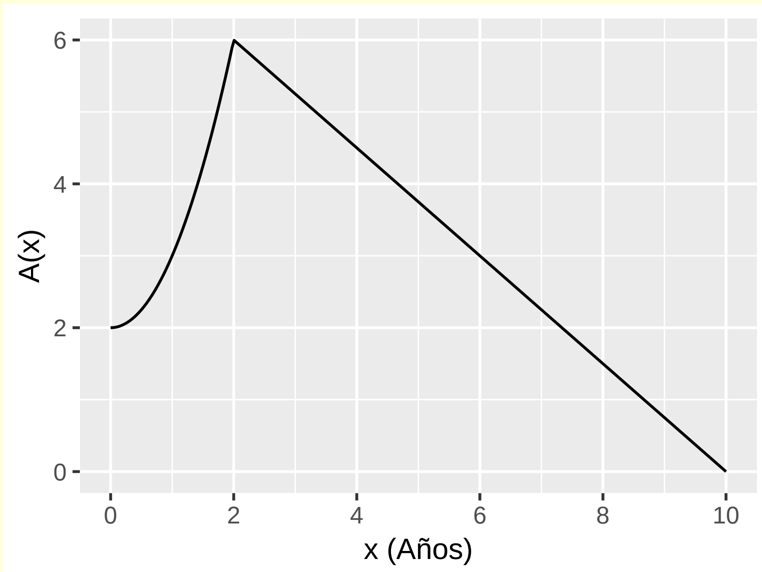
$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{0{,}03}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) = 983{,}4496 = 984$$

3. En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & 0 \le x < 2 \\ \frac{-3x+30}{4} & 2 \le x \le 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

a) ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?



Calculamos la derivada:

$$A'(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{4} & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

La derivada es positiva en $[0,2)$ y por tanto la función es creciente en dicho intervalo; es negativa en $[2,10]$ y por tanto es creciente en este intervalo.

b) ¿Cuando obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?.

- Para $0 \leq x < 2$ se tiene que $A'(x) = 2x \Rightarrow$La derivada se anula en $x = 0$, pero como $A''(x) = 2$, este valor corresponde a un mínimo.
- Como en el tramo $0 \leq x < 2$ la función $A(x)$ es creciente, su máximo se obtiene para $x \to 2$.
- A su vez, como en el tramo $2 \leq x \leq 10$ es decreciente, también en dicho tramo el máximo se obtiene para $x = 2$.
- Por tanto $A(x)$ tiene un máximo en $x = 2$, por lo que la audiencia máxima se alcanza a los dos años del comienzo de la serie.
- Dicha audiencia es $A(2) = 6$, lo que significa que tuvo una audiencia máxima de 60000 personas .

c) ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

- $A(0) = 2 \Rightarrow$ 20000 personas al inicio.
- $A(x) = 1{,}5 \Rightarrow \frac{-3x+30}{4} = 1{,}5 \Rightarrow -3x+30 = 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow$Se dejaría de emitir a los 8 años.

4. Un kiosko vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

   a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

Llamamos l al total de libros vendidos, p al total de periódicos y r al total de revistas. El sistema de ecuaciones es entonces:

$$\begin{aligned} p+5r+12l &= 1500 \\ \frac{p}{r} &= \frac{10}{3} \\ 12l &= \frac{p+5r}{4} \end{aligned}$$

que podemos reescribir:

$$\begin{aligned} p+5r+12l &= 1500 \\ 3p-10r &= 0 \\ p+5r-48l &= 0 \end{aligned}$$

   b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosko la semana pasada?

La solución del sistema es:

$$
\begin{aligned}
p &= 480 \\
r &= 144 \\
l &= 25
\end{aligned}
$$