Opción A

Ejercicio A1

Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Incógnitas:

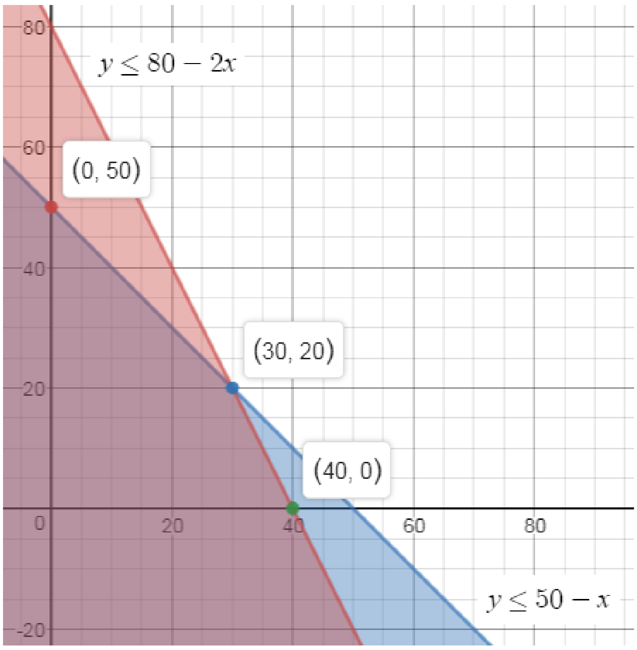
$x \longrightarrow$ número de collares que se fabrican

$y \longrightarrow$ número de pulseras que se fabrican

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \leq 50 \\ 2x+y \leq 80 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \leq 50-x \\ y \leq 80-2x \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Región factible y vértices:



Función objetivo que hay que maximizar:

$$F(x,y)=5x+4y$$

Determinamos el beneficio máximo:

$$F(0,50)=200, \qquad \boxed{F(30,20)=230}, \qquad F(40,0)=200$$

El mayor beneficio es de 230 €, y se obtiene elaborando 30 collares y 20 pulseras.

Autor: ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA enrique.castanos.garcia@gmail.com

Ejercicio A2

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{si } x<4 \\ x^2-16 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

La función $f(x)$ está definida mediante expresiones polinómicas, que son siempre continuas. Así, el único posible punto de discontinuidad se encuentra en $x=4$. Estudiamos los límites laterales en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(4-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(x^2-16) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

Cumpliéndose que:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = 0$$

Luego la función es continua en $x=4$ y, en consecuencia:

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}}$$

b) Analiza el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.

Para determinar la monotonía de la función debemos analizar el signo de su primera derivada:

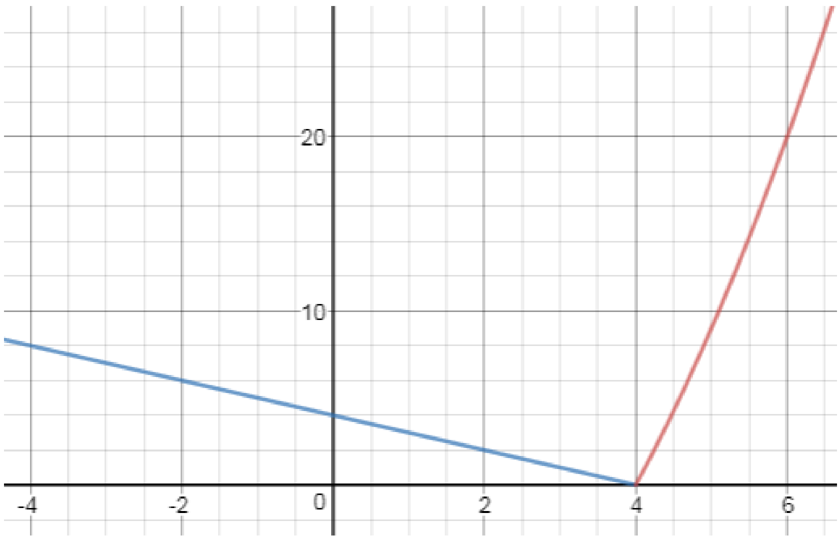
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<4 \\ 2x & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \; \forall \, x < 4 \longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, 4)}$$

$$f'(x) > 0 \; \forall \, x \geq 4 \longrightarrow \boxed{f(x) \text{ es creciente en } (4, +\infty)}$$

De esta información es fácil deducir que:

$$\boxed{f(x) \text{ presenta un mínimo cuando } x = 4}$$



Ejercicio A3

Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1 480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.

a) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.

El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

El sueldo medio de un trabajador, $\bar{X}$, también sigue una distribución normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde la media muestral es $\bar{x} = 1\,480$ €, la desviación típica es $\sigma = 250$ € y el tamaño de la muestra es $n = 625$. Calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 90 %:

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = P(Z < z_{\alpha/2}) - P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z < z_{\alpha/2}) - [1 - P(Z < z_{\alpha/2})] = 0{,}90$$

$$\longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0{,}90}{2} = 0{,}95 \longrightarrow \Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}95 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

Por lo tanto:

$$\left(1\,480 - 1{,}645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}};\ 1\,480 + 1{,}645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}}\right) \longrightarrow \boxed{(1\,463{,}55; 1\,496{,}45)}$$

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

El error máximo admisible viene dado por:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Procediendo como en el apartado anterior, para un nivel de confianza del 99 %:

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = P(Z < z_{\alpha/2}) - P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z < z_{\alpha/2}) - [1 - P(Z < z_{\alpha/2})] = 0{,}99$$

$$\longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0{,}99}{2} = 0{,}995 \longrightarrow \Phi(z_{\alpha/2}) = 0{,}995 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo sea de 10 € es:

$$10 > 2{,}575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \longrightarrow 10 > \frac{643{,}75}{\sqrt{n}} \longrightarrow \sqrt{n} > 64{,}375 \longrightarrow n > 4\,144{,}1 \longrightarrow \boxed{n \geq 4\,145}$$

Ejercicio A4

El 40 % de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de inter–nautas emplea ambos?

Sea D el suceso "utilizar *Dropbox*" y G el suceso "utilizar *Google Drive*". Entonces:

$$P(D) = 0{,}25, \qquad P(G) = 0{,}20, \qquad P(D \cup G) = 0{,}40$$

Teniendo en cuenta que:

$$P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G)$$

La probabilidad de la intersección de ambos sucesos es:

$$P(D \cap G) = P(D) + P(G) - P(D \cup G) = 0{,}25 + 0{,}20 - 0{,}40 = 0{,}05$$

Luego, el porcentaje de internautas que utiliza los dos sistemas de almacenamiento es del $\boxed{5\ \%}$.

Opción B

Ejercicio B1

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + (a-1)z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

Escribimos la matriz de los coeficientes, M, y la matriz ampliada con los términos independientes, A:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Estudiaremos el rango de cada una de ellas. Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xRightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 3\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow{4\cdot F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 4-a & 12 \end{array}\right)$$

Por el teorema de Rouché–Frobenius:

— Si $\underline{a = 4}$:

$$\text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(A) = 3 \longrightarrow \boxed{\text{Sistema incompatible}}$$

— Si $\underline{a \neq 4}$:

$$\text{rango}(M) = \text{rango}(A) = n = 3 \longrightarrow \boxed{\text{Sistema compatible determinado}}$$

b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

Cuando $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -8y - z = 0 \\ z = 12 \end{cases}$$

De donde se deduce:

$$\boxed{z = 12}$$

$$-8y - z = 0 \longrightarrow y = -\frac{z}{8} \longrightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}}$$

$$x + 3y + z = 1 \longrightarrow x = 1 - 3y - z \longrightarrow \boxed{x = -\frac{13}{2}}$$

Ejercicio B2

Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, donde $t \in (0, 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.

Como los beneficios, en millones de euros, vienen dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, debemos determinar el valor de t para el cual $P(t) = 16$:

$$t^2 - 10t + 16 = 16 \longrightarrow t^2 - 10t = 0 \longrightarrow t \cdot (t - 10) = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

Dado que $t \in (0, 10]$, entonces $t = 0$ no es una solución válida y, en consecuencia:

$$\boxed{t = 10 \text{ años}}$$

b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

En el punto en el cual función $P(t)$ alcanza el mínimo debe cumplirse que $P'(t) = 0$. Siendo:

$$P'(t) = 2t - 10$$

Por lo tanto:

$$2t - 10 = 0 \longrightarrow \boxed{t = 5 \text{ años}}$$

Se comprueba que para este valor de t existe un mínimo, evaluando el signo de la segunda derivada:

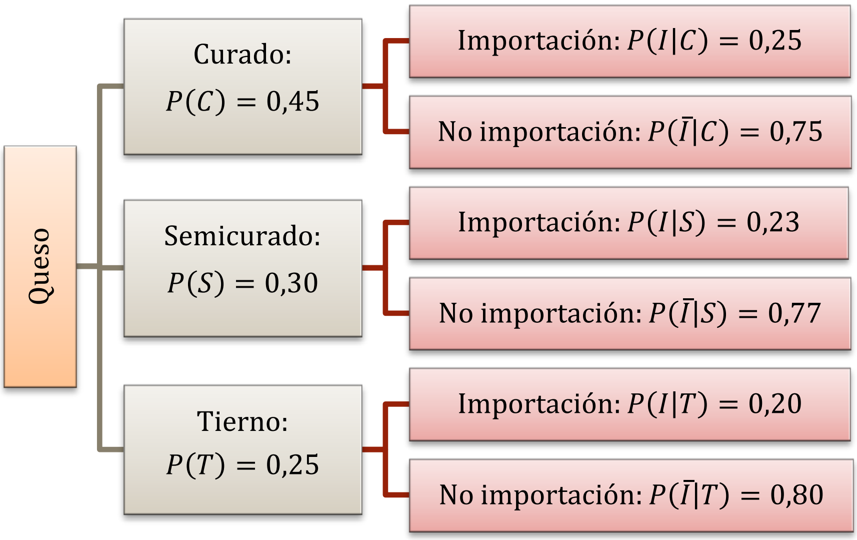
$$P''(x) = 2$$

Como la segunda derivada es siempre positiva, sea cual sea el valor de t, podemos asegurar que hay un mínimo cuando $t = 5$ años. En ese momento, los beneficios son $P(5) = -9$ millones de euros (es decir, la empresa tiene pérdidas).

Ejercicio B3

Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45 %), semicurado (30 %) y tierno (25 %). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25 % del queso curado, el 23 % del semicurado y el 20 % del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?



$$P(\bar{I}) = P(C) \cdot P(\bar{I}|C) + P(S) \cdot P(\bar{I}|S) + P(T) \cdot P(\bar{I}|T) = 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}30 \cdot 0{,}77 + 0{,}25 \cdot 0{,}80$$

$$\boxed{P(\bar{I}) = 0{,}7685 \longrightarrow 76{,}85\ \%}$$

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(C|I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(I|C)}{1 - P(\bar{I})} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}7685} \longrightarrow \boxed{P(C|I) = 0{,}4860 \longrightarrow 48{,}60\ \%}$$

Ejercicio B4

La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80 %, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60 %. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50 %, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

La probabilidad de aprobar un examen tipo test es $P(T) = 0{,}80$; la de aprobar un examen de problemas es $P(P) = 0{,}60$; y la de aprobar los dos, $P(T \cap P) = 0{,}50$. Se pide la probabilidad de no aprobar ninguno:

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) \xrightarrow{\text{Ley de Morgan}} P(\bar{T} \cap \bar{P}) = P(\overline{T \cup P}) = 1 - P(T \cup P)$$

Siendo $P(T \cup P) = P(T) + P(P) - P(T \cap P) = 0{,}80 + 0{,}60 - 0{,}50 = 0{,}90$. En definitiva:

$$P(\bar{T} \cap \bar{P}) = 1 - 0{,}90 \longrightarrow \boxed{P(\bar{T} \cap \bar{P}) = 0{,}10 \longrightarrow 10\ \%}$$

Autor: Enrique Castaños García enrique.castanos.garcia@gmail.com