UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
b) Para $a=3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial A · X = B.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=2x^3-8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=0$, $x=2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & si \quad x<3 \\ x^2-4 & si \quad x\geq 3 \end{cases}.$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio
a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.
a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos.

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.
a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=x^3+x^2-5x+3$.
a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0'3,\ P(B/A)=0'4,\ P(B/\overline{A})=0'6$. Calcúlese:

a) $P(A/B)$

b) $P(\overline{A}/\overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.
a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es P = 0´22, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de *a* para los cuales la matriz *A* no tiene matriz inversa.
b) Para $a=3$, calcúlese la matriz inversa de *A* y resuélvase la ecuación matricial A · X = B.

a) Para que la matriz A no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+4-2a-4=a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para a = 0 y a = 2.

b) Para $a=3$ la matriz A tiene inversa y su determinante vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9+4-6-4=3$$

Calculamos la matriz inversa con la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial A · X = B se obtiene despejando y usando la inversa.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 27-18 \\ -9+1+6 \\ -9-2+15 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f\left(x\right)=2x^3-8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva *y = f (x)* es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de *f* , el eje de abscisas y las rectas $x=0$, $x=2$.

a) Si la tangente es horizontal significa que su pendiente es 0, es decir, la derivada de la función $f\left(x\right)=2x^3-8x$ debe ser 0.

$$f\left(x\right)=2x^3-8x \Rightarrow f\,'\left(x\right)=6x^2-8$$

$$f\,'\left(x\right)=0 \Rightarrow 6x^2-8=0 \Rightarrow 6x^2=8 \Rightarrow x^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

En los puntos $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ la tangente es horizontal.

b) Determinamos si la función corta al eje OX (y = 0).

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x\right)=2x^3-8x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^3-8x=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ninguno de estos puntos de corte está en el intervalo (0, 2), por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función $f\left(x\right)=2x^3-8x$ entre 0 y 2.

$$\int_0^2 2x^3-8x\,dx=\left[2\frac{x^4}{4}-8\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_0^2=\left[\frac{2^4}{2}-4\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{2}-4\cdot 0^2\right]=8-16=-8$$

$$\acute{A}rea=\left|\int_0^2 2x^3-8x\,dx\right|=\left|-8\right|=\boxed{8\,u^2}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-9} & si \quad x<3\\ x^2-4 & si \quad x\geq 3\end{cases}.$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

a) El denominador de la fracción se anula en 3 y –3, ya que si lo igualamos a cero obtenemos:

$$x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

por lo que no es continua en x = –3.

$$f(-3)=\frac{(-3)^3}{(-3)^2-9}=\frac{-27}{0}=\text{No existe}$$

Estudiemos la continuidad de la función en x = 3.

- Existe $f(3)=3^2-4=9-4=5$
- Existe $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3}{x^2-9}=\frac{27}{0}=\infty$. No existe

No se cumple esta condición y no cabe plantear más. Tampoco es continua en x = 3.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b)

Asíntota vertical. $x=a$
Como x = –3 y x = 3 no están en el dominio, estas son las asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2-4=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$. Por $+\infty$ no tiene asíntota oblicua.

Probemos por la rama $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-9\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-9x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-x^3+9x}{x^2-9}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{x^2-9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x}=\frac{9}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua es $y=x$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio
a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

a) Tenemos que comprobar si

$$P\left(\textit{Desayune y haga ejercicio regularmente}\right)=P\left(\textit{Desayune}\right)\cdot P\left(\textit{Haga ejercicio regularmente}\right)$$

Hallemos esas probabilidades

$$P\left(\textit{Desayune y haga ejercicio regularmente}\right)=$$

$$=P\left(\textit{Desayune}\right)\cdot P\left(\textit{Haga ejercicio regularmente / desayune}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{25}=\frac{18}{75}=\frac{6}{25}$$

Por otro lado

$$P\left(\textit{Desayune}\right)\cdot P\left(\textit{Haga ejercicio regularmente}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

Evidentemente $\frac{6}{25}\neq\frac{4}{15}$, por lo que no son independientes.

b)

$$P\left(\text{No siempre desayune y No haga deporte regularmente}\right)=P\left(\overline{Desayune}\cap\overline{Deporte}\right)=$$

$$=P\left(\overline{Desayune\cup Deporte}\right)=1-P\left(Desayune\cup Deporte\right)=$$

$$=1-\left(P\left(Desayune\right)+P\left(Deporte\right)-P\left(Deporte\cap Desayune\right)\right)=$$

$$=1-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{6}{25}\right)=1-\left(\frac{50}{75}+\frac{30}{75}-\frac{18}{75}\right)=1-\frac{62}{75}=\boxed{\frac{13}{75}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO
Realicemos una tabla de contingencia

	Hacen ejercicio	**No hacen ejercicio**	
Desayunan			$\frac{2}{3}$
No desayunan			
	$\frac{2}{5}$		100%

Además entre los 2/3 que siempre desayunan 9/25 hacen ejercicio, es decir, $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{25}=\frac{18}{75}$ del total hacen ejercicio y desayunan. Lo colocamos en la tabla.

	Hacen ejercicio	**No hacen ejercicio**	
Desayunan	$\frac{18}{75}$		$\frac{2}{3}$
No desayunan			
	$\frac{2}{5}$		100%

Si lo pasamos todos los datos a denominador común = 75 la tabla nos queda

	Hacen ejercicio	**No hacen ejercicio**	
Desayunan	$\frac{18}{75}$		$\frac{50}{75}$
No desayunan			
	$\frac{30}{75}$		$\frac{75}{75}$

Y ahora completamos los datos que faltan, sabiendo que fila y columna deben sumar lo indicado al final de fila o columna.

	Hacen ejercicio	**No hacen ejercicio**	
Desayunan	$\frac{18}{75}$	$\frac{32}{75}$	$\frac{50}{75}$
No desayunan	$\frac{12}{75}$	$\frac{13}{75}$	$\frac{25}{75}$
	$\frac{30}{75}$	$\frac{45}{75}$	$\frac{75}{75}$

La respuesta a la probabilidad pedida es muy sencilla, pues es el contenido de la celda donde coinciden la columna "No hacen ejercicio" y la fila "No desayunan" que es $\frac{13}{75}$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.
a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos.
Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Llamemos X = Peso de un paquete de harina en gramos. X = N(μ, 25)

a) $\bar{x} = 560\ gramos; \quad n = 15$

Con el nivel de confianza del 95% significa que

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(560 - 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}}, 560 + 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{15}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(547'35, 572'65)$

b) Si X=N(μ, σ) la distribución de la media es una normal de parámetros $\overline{X}_{50} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso la media sigue una normal $\overline{X}_{50} = N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right)$

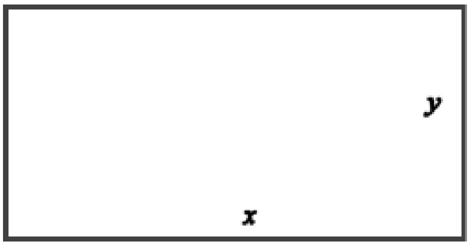
$$P\left(\overline{X}_{50} \geq 565\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{50} - 560}{25/\sqrt{50}} \geq \frac{565-560}{25/\sqrt{50}}\right) = P\left(Z \geq \frac{565-560}{25/\sqrt{50}}\right) = P\left(Z \geq \sqrt{2}\right) =$$

$$= P(Z \geq 1{,}41) = 1 - P(Z \leq 1{,}41) = \{\text{Buscamos en la tabla}\} = 1 - 0{,}9207 = \boxed{0{,}0793}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.
a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

La situación es la que refleja el dibujo:



Llamemos al largo = x y al ancho = y .
Las restricciones de la situación son:

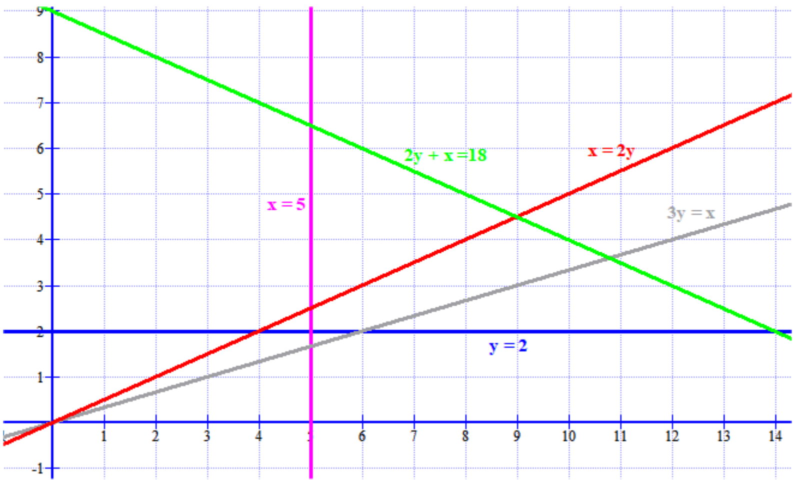
- El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho → $y \geq 2$
- El estanque deberá tener al menos 5 metros de largo → $x \geq 5$
- Su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho → $3y \geq x \geq 2y$
- Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros → $1000y + 500x \leq 9000$

Resumiendo las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 2 \\ x \geq 5 \\ 3y \geq x \\ x \geq 2y \\ 1000y + 500x \leq 9000 \Rightarrow 2y + x \leq 18 \end{array}\right\}$$

Y la función objetivo (a maximizar) es el ancho (y).

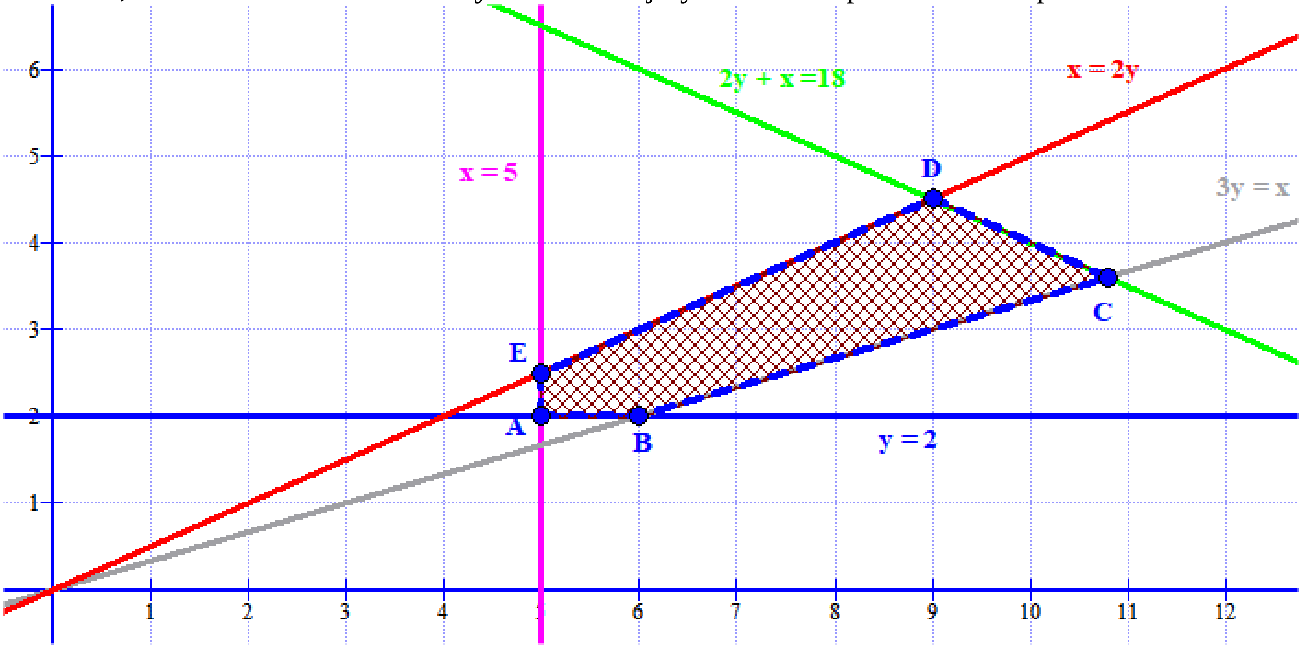
Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones:



El punto (8, 3) cumple todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3\geq 2 \\ 8\geq 5 \\ 3\cdot 3\geq 8 \\ 8\geq 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3+8\leq 18 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la zona factible es la subrayada del dibujo y delimitada por la línea de puntos azules:



Los puntos candidatos a maximizar la función son los vértices: A(5, 2), B(6, 2) y el resto de puntos los obtengo resolviendo los sistemas de cada par de ecuaciones.

C es el punto de corte de la recta $3y = x$ y la recta $2y + x = 18$

$$\left.\begin{array}{l} 3y = x \\ 2y + x = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y + 3y = 18 \Rightarrow 5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5} = 3,6 \Rightarrow x = 3\cdot 3,6 = 10,8$$

C(10´8, 3´6)

D es el punto de corte de $x = 2y$ y la recta $2y + x = 18$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ 2y + x = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y + 2y = 18 \Rightarrow 4y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{4} = 4,5 \Rightarrow x = 2\cdot 4,5 = 9$$

D(9, 4´5)

E es el punto de corte de la recta $x = 5$ y la recta $x = 2y$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{5}{2} = 2,5$$

E(5, 2´5)

Valoremos cada punto para obtener el que tiene un ancho (y) mayor.

A(5, 2), B(6, 2), C(10´8, 3,6), D(9, 4´5), E(5, 2´5)

El punto D tiene 4´5 en la coordenada "y" por lo que es la solución del problema.

El estanque debe tener 4,5 metros de ancho y 9 metros de largo.
El coste es $1000\cdot 4,5 + 500\cdot 9 = 4500 + 4500 = 9000€$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$\left(AB\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

a) La matriz A tiene determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}=\cancel{12}+64+60-40-96-\cancel{12}=124-136=-12\neq 0$$

La matriz A es invertible y su inversa se calcula con la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}}{-12}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix}$$

b)

La inversa de AB cumple que $\left(AB\right)^{-1}\left(AB\right)=I$ y esto se cumple con la matriz $B^{-1}A^{-1}$.

$$B^{-1}A^{-1}\left(AB\right)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

Aplicando esto nos queda:

$$\left(AB\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}A^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}A$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6-4 & 3-3 & 6-6 \\ -2+4 & -1+3 & -2+6 \\ 6-6-12 & 16-3-9 & 20-6-18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -12 & 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

a) Los puntos de corte se obtienen igualando las coordenadas a cero.
Si $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 + 3 = 3$ El punto de corte con el eje OY es (0, 3).

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + x^2 - 5x + 3$ Como es una ecuación de grado 3, aplicamos la regla de Ruffini para obtener sus raíces.

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

	1	1	–5	3
1		1	2	–3
	1	2	–3	0

Una de las raíces es x = 1
Resolvemos la ecuación de segundo grado restante.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Hay otra raíz que es x = –3.
Los puntos de corte con el eje OX son (1, 0) y (–3, 0).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 + x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 + x^2 - 5x + 3 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

b) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en ese punto. Hallamos la derivada de la función y la igualamos a 3.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 3 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = \begin{cases} = \dfrac{-2+10}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ = \dfrac{-2-10}{6} = -2 \end{cases}$$

La pendiente de la recta tangente es 3 en los valores $x = \frac{4}{3}$ y $x = -2$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0,3,\ P(B/A)=0,4,\ P\left(B/\overline{A}\right)=0,6$. Calcúlese:

a) $P(A/B)$

b) $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Como $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(B\cap A)}{0,3}=0,4\Rightarrow P(B\cap A)=0,12$

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{1-P(A)}=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{0,7}=0,6\Rightarrow P\left(B\cap\overline{A}\right)=0,6\cdot 0,7=0,42$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P\left(B\cap\overline{A}\right)=0,12+0,42=0,54$$

a) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,12}{0,54}=\boxed{\dfrac{2}{9}}$

b)

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{1-0,54}=\frac{1-P(A\cup B)}{0,46}=\frac{1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)}{0,46}=$$

$$=\frac{1-(0,3+0,54-0,12)}{0,46}=\frac{1-0,72}{0,46}=\frac{0,28}{0,46}=\boxed{\frac{14}{23}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

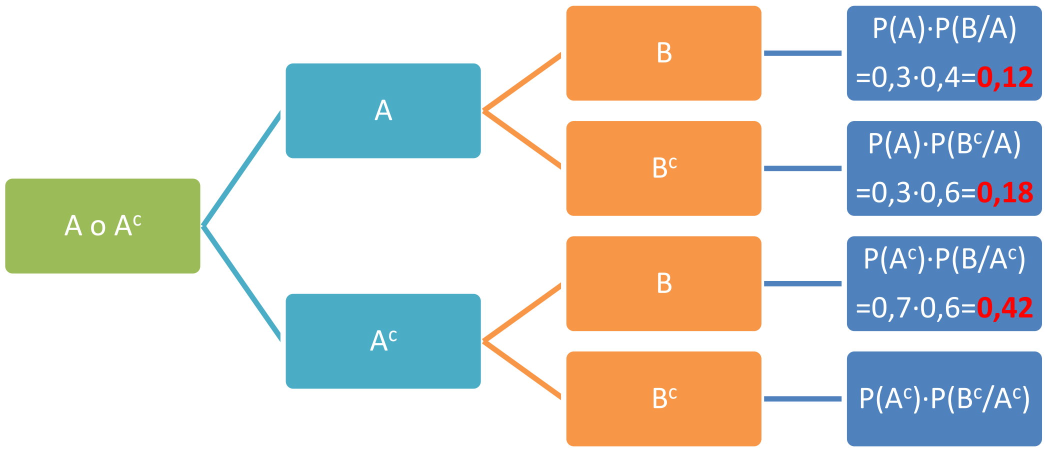
Sabemos que

$P(A)=0,3\Rightarrow P\left(A^c\right)=1-0,7=0,3$

$P(B/A)=0,4\Rightarrow\ P\left(B^c/A\right)=1-0,4=0,6$

$P\left(B/\overline{A}\right)=0,6$

Construyamos un diagrama de árbol



Con este esquema:

$$P\left(A^c/B^c\right)=\frac{P\left(A^c\cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}=\frac{1-0,12-0,18-0,42}{1-0,54}=\frac{0,28}{0,46}=\boxed{\frac{14}{23}}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.
a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es P = 0´22, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

P = 0´22 →q=1-0,22=0,78; $\alpha = 0,01$; Error < 0,04. ¿Cuánto vale n?

a) El error se obtiene de la fórmula:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0,01 \to \frac{\alpha}{2} = 0,005 \to 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \to \{\text{Buscamos en la tabla}\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

Aplicamos este resultado a la fórmula del error:

$$Error = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,04 = 2,575 \cdot \frac{\sqrt{0,22 \cdot 0,78}}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot \sqrt{0,22 \cdot 0,78}}{0,04} = 26,67$$

$$n = 711,1$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 712 trabajadores.

b)

N = 1000; $p = \frac{250}{1000} = 0,25$; $\alpha = 0,05$

$$\alpha = 0,05 \to \frac{\alpha}{2} = 0,025 \to 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \to \{\text{Buscamos en la tabla}\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

El intervalo de confianza para la proporción de la población es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} ,\ p + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \right) = \left(0,25 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,25 \cdot 0,75}}{\sqrt{1000}} ,\ 0,25 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,25 \cdot 0,75}}{\sqrt{1000}} \right)$$

El intervalo de confianza es $(0´212, 0´288)$