UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A – 2B sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y ($C^t \cdot C$), donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, *f (x)*, viene dada por la expresión:

$$f'(x)=2x^2-4x-6$$

a) Obténgase la expresión de la función *f (x)* sabiendo que pasa por el punto (0, 3).
b) Determínense los extremos relativos de la función *f (x)* indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que
$P(A)=0'6,\ P(B)=0'8\ y\ P\left(A\cap\overline{B}\right)=0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso *A* si no ha ocurrido el suceso *B* y determínese si los sucesos *A* y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso *B*.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, *A* o *B*.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z&=0\\ x+my-z&=0\\ x-y-mz&=0 \end{aligned}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real *m* para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) Resuélvase el sistema para $m=1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f (x)* y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La función real de variable real, *f (x)*, se define según la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & si \quad x\le 0\\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) Considerando $k=0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función *f (x)*, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0’60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0’30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0’15. Seleccionado un niño al azar de esta región,
a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica σ = 1´5 kilogramos.
a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0’49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
b) Supóngase que μ = 6 kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5’75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A – 2B sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y ($C^t \cdot C$), donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

a)

$$A-2B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-2B=\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2B|=\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2k-4-24-1=2k-29$$

$$|A-2B|=0\Rightarrow 2k-29=0\Rightarrow \boxed{k=\frac{29}{2}}$$

b) C no es invertible, pues no es cuadrada.
Veamos cómo es $C^t \cdot C$.

$$C^t\cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2 \quad\to\quad 2\times 2$$

$C^t\cdot C$ es cuadrada y su determinante vale $|C^t\cdot C|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$

$C^t\cdot C$ es invertible.
Su inversa es:

$$\left(C^t\cdot C\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(C^t\cdot C\right)^t\right)}{|C^t\cdot C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Llamemos x = número de litros de helado e y = número de litros de horchata.

a) Las restricciones son:
- La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas en un máximo de 20 horas → $x+2y\le 20$.
- Puede preparar hasta 15 litros de helado → $x\le 15$
- Tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata → $x+y\ge 10$
- Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0$; $y\ge 0$

Resumiendo todas las restricciones:

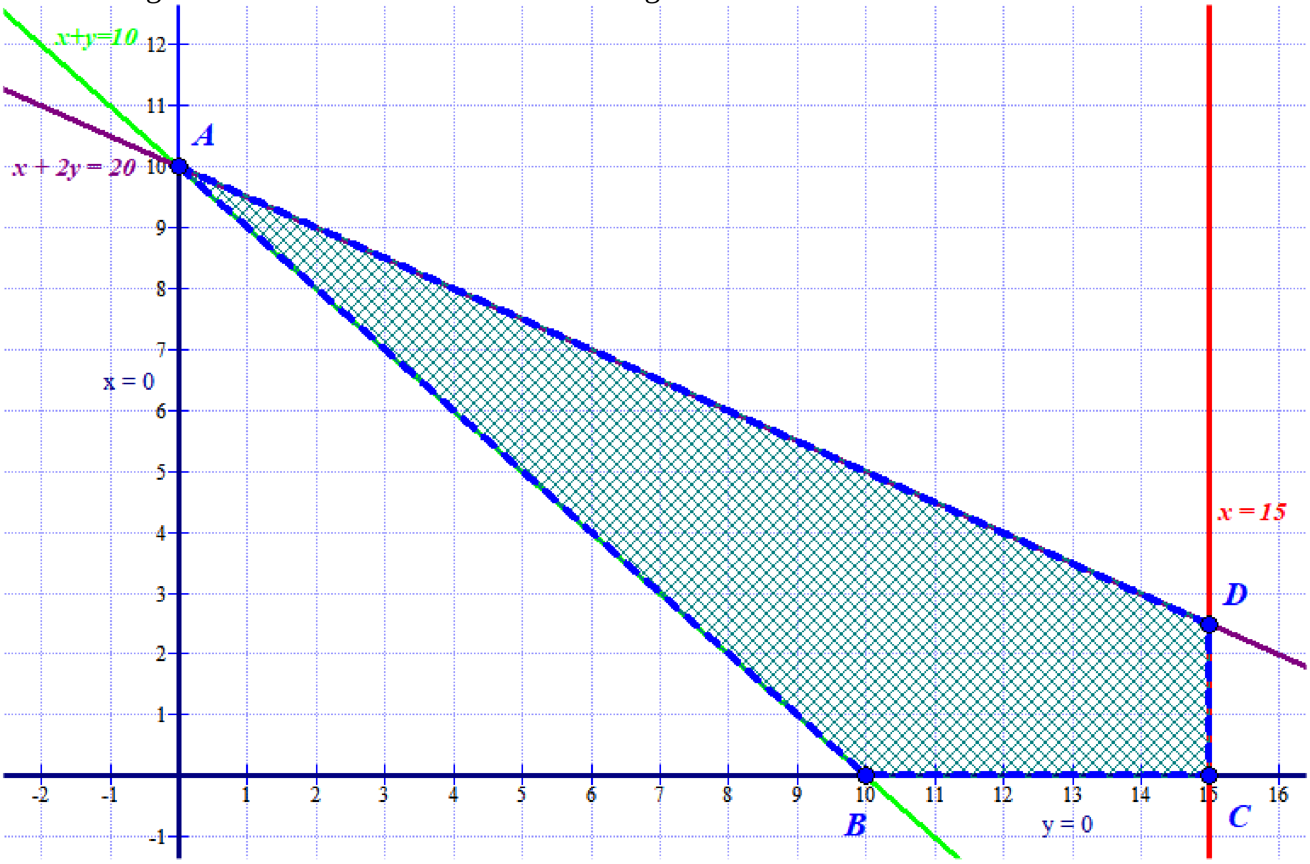
$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 20 \\ x\le 15 \\ x+y\ge 10 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a estas inecuaciones:

Tenemos que deducir cual es la región factible.
Probamos con el punto (12, 1) y vemos que cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+2\le 20 \\ 12\le 15 \\ 12+1\ge 10 \\ 12\ge 0 \\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es la sombreada de la imagen:



b) La función beneficio es $B(x,y)=25x+12y$. Si deseamos maximizarla, debemos decidir cuál de los vértices de la región factible nos da más beneficio.
A(0, 10); B(10, 0); C(15, 0); D es el punto de corte de la recta $x=15$ y la recta $x+2y=20$.
Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x=15 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 15+2y=20 \Rightarrow 2y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{2}=2{,}5$$ El punto D(15, 2´5)

$A(0,\ 10)\to B(0,10)=0+120=120€$

$B(10,\ 0)\to B(10,0)=250+0=250€$

$C(15,\ 0)\to B(15,0)=375+0=375€$

$D(15,2´5)\to B(15,2´5)=375+30=405€$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(15, 2´5), que significa 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata. Consiguiendo un beneficio de 405 €.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, *f (x)*, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función *f (x)* sabiendo que pasa por el punto (0, 3).
b) Determínense los extremos relativos de la función *f (x)* indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

a) La función *f (x)* es la integral de la derivada, es decir,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 2x^2 - 4x - 6dx = 2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x + C$$

$$f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$$

Como además pasa por el punto (0, 3).

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$$

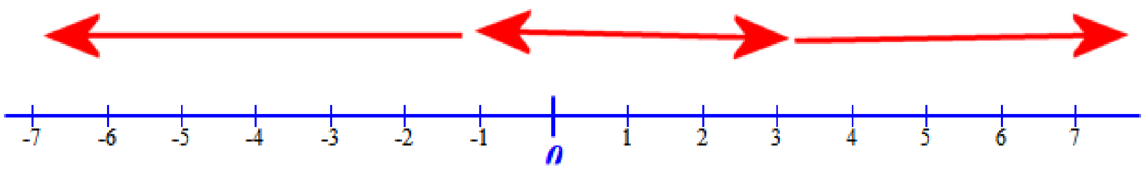
La función es $f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$

b) Para determinar los puntos críticos derivamos (la sabemos) e igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada en las tres partes en que se divide la recta real.

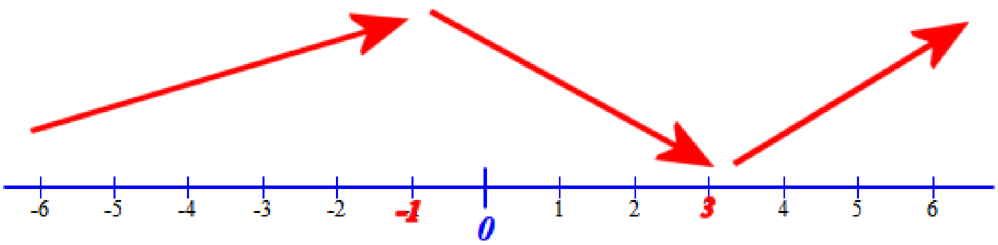


En $(-\infty, -1)$ probamos con –2 y la derivada vale

$f'(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) - 6 = 8 + 8 - 6 = 10 > 0$. La función crece.

En $(-1, 3)$ probamos con 0 y la derivada vale $f'(0) = 2(0)^2 - 4(0) - 6 = -6 < 0$. La función decrece.

En $(3, +\infty)$ probamos con 5 y la derivada vale $f'(5) = 2(5)^2 - 4(5) - 6 = 50 - 20 - 6 = 24 > 0$. La función crece.



En x = –1 hay un máximo relativo. En x = 3 hay un mínimo relativo.

Para estudiar la concavidad o convexidad utilizamos la segunda derivada.

$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 \Rightarrow f''(x) = 4x - 4$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$

En x = 1 hay un punto de inflexión como se aprecia en el esbozo de la gráfica superior.

Es convexa en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, +\infty)$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que

$P(A) = 0'6,\ P(B) = 0'8\ y\ P(A \cap \overline{B}) = 0'1$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso *A* si no ha ocurrido el suceso *B* y determínese si los sucesos *A* y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso *B*.

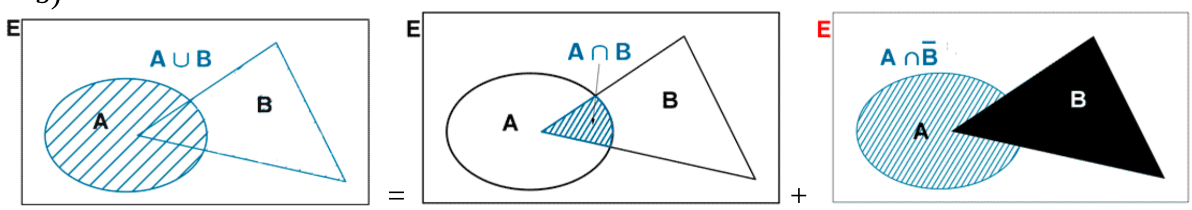
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, *A* o *B*.

a) $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0'1}{1-0'8} = \dfrac{0'1}{0'2} = 0'5$.

Veamos si $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap \overline{B}) = 0'1 \\ P(A)P(\overline{B}) = 0'6 \cdot (1-0'8) = 0'6 \cdot 0'2 = 0'12 \end{array}\right\} \text{No son iguales y por tanto no son independientes.}$$

b)



$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'8 - 0'5 = \boxed{0'9}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos una tabla de contingencia.

	B	$\overline{B}$	
A		**0,1**	**0´6**
$\overline{A}$			
	0´8		**1**

Completamos la tabla

	B	$\overline{B}$	
A	**0´5**	**0,1**	**0´6**
$\overline{A}$	**0´3**	**0´1**	**0´4**
	0´8	**0´2**	**1**

$P(A \cup B) = 0'5 + 0'3 + 0'1 = \boxed{0'9}$ Es sumar todas las casillas centrales, menos la celda donde coinciden la columna $\overline{B}$ y la fila $\overline{A}$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Llamemos X = Precio mensual de las clases de Pilates. X = N(μ, 49)

a) $\bar{x} = 34$ €; $n = 64$

Con el nivel de confianza del 99,2% significa que

$1 - \alpha = 0{,}992 \rightarrow \alpha = 0{,}008 \rightarrow \alpha/2 = 0'004 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}996 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}65}$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(34 - 2{,}65\cdot\frac{34}{\sqrt{64}}, 34 + 2{,}65\cdot\frac{34}{\sqrt{64}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(31'68, 36'32)$

b) Para un nivel de confianza del 95% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

Como el error es 3 € entonces:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{7}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{7}{3} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1{,}96\cdot\frac{7}{3}\right)^2 = 20{,}91$$

El tamaño mínimo de la muestra es 21 individuos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real *m* para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) Resuélvase el sistema para $m=1$.

a) Si el sistema es compatible determinado la solución única es la trivial, por lo que debemos buscar el valor de m que hace que sea compatible indeterminado, es decir, cuando el rango de la matriz de coeficientes y la ampliada son iguales y a su vez menores que 3.

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}$ con determinante $|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix}=m^2-1-1-m+m+1=m^2-1$

Si igualamos a cero.

$|A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1$

- Si $m\neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado y por tanto solo tiene la solución trivial.

- Si $m=1$ el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} + \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & =0 \\ -x & +y & +z & =0 \\ \hline & 2y & & =0 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} + \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & -y & -z & =0 \\ -x & +y & +z & =0 \\ \hline & & 0 & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ \Rightarrow 2y=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ \boxed{y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow -x+z=0 \Rightarrow \boxed{x=z}$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $m=-1$ el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} + \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & -y & -z & =0 \\ -x & +y & +z & =0 \\ \hline & & 0 & =0 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} + \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} x & -y & +z & =0 \\ -x & +y & +z & =0 \\ \hline & & 2z & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ \Rightarrow 0=0 \\ 2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ \boxed{z=0} \end{array}\right\} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \boxed{y=x}$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Resuelto en el apartado anterior. $x=t;\ y=0;\ z=t$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f (x)* y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

a) Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{0-2x\cdot 8}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-16x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-16x}{\left(x^2+4\right)^2}=0\Rightarrow -16x=0\Rightarrow x=0$$

Veamos que ocurre antes de x = 0 y después de x = 0.

En $(-\infty,0)$ tomamos x = –2 y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-16(-2)}{(4+4)^2}=\frac{32}{16^2}>0$. La función crece.

En $(0,+\infty)$ tomamos x = 2 y la derivada vale $f'(2)=\frac{-16(2)}{(4+4)^2}=\frac{-32}{8^2}=\frac{-1}{2}<0$. La función decrece.

En $(-\infty,0)$ crece y en $(0,+\infty)$ decrece.

Asíntotas verticales. $x=a$
Si igualamos a cero el denominador
$x^2+4=0\Rightarrow x^2=-4\Rightarrow x=\sqrt{-4}=$ No existe , No hay asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2+4}=\frac{8}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x^2+4}=\frac{8}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
No hay, pues hay una horizontal

b) La ecuación de la recta tangente en $x=2$ es:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

Como $f'(2)=\frac{-16(2)}{(4+4)^2}=\frac{-32}{8^2}=\frac{-1}{2}$; $f(2)=\frac{8}{2^2+4}=\frac{8}{8}=1$

La tangente queda:

$$y-1=\frac{-1}{2}(x-2)\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x+1+1\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{2}x+2}$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La función real de variable real, *f (x)*, se define según la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) Considerando $k=0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función *f (x)*, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

a) La primera función es exponencial que es continua. La segunda es polinómica, también es continua. La tercera es una fracción cuyo denominador se anula en x =3 que no está en su dominio de definición. La función es continua si lo es en x = 0 y en x = 3.

En x = 0 para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(0)=e^0+k=1+k$
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x+k=1+k$
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 1-x^2=1-0=1$
- Los tres valores son iguales. $1+k=1 \Rightarrow k=0$

En x = 3 para ser continua deben cumplirse las cuatro condiciones:

- Existe $f(3)=1-3^2=-8$
- Existe $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} 1-x^2=1-9=-8$
- Existe $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{0}=+\infty$

  No se cumple la tercera condición, por lo que no es continua en x = 3.

Conclusión:
Para $k=0$ la función es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$. Para $k\neq 0$ la función es continua en $\mathbb{R}-\{0,3\}$.

b) Para $k=0$ la función queda

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

Busquemos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas en el intervalo (–1, 1).

$En\left(-1,0\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

$En\left(0,1\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-x^2 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Estos puntos no pertenecen a nuestro intervalo (–1, 1).

Como no hay puntos de corte el área de este recinto solo es una integral definida de la función desde –1 a 1. Aunque debemos separarlo en dos integrales al cambiar de definición.

$$\int_{-1}^{0} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

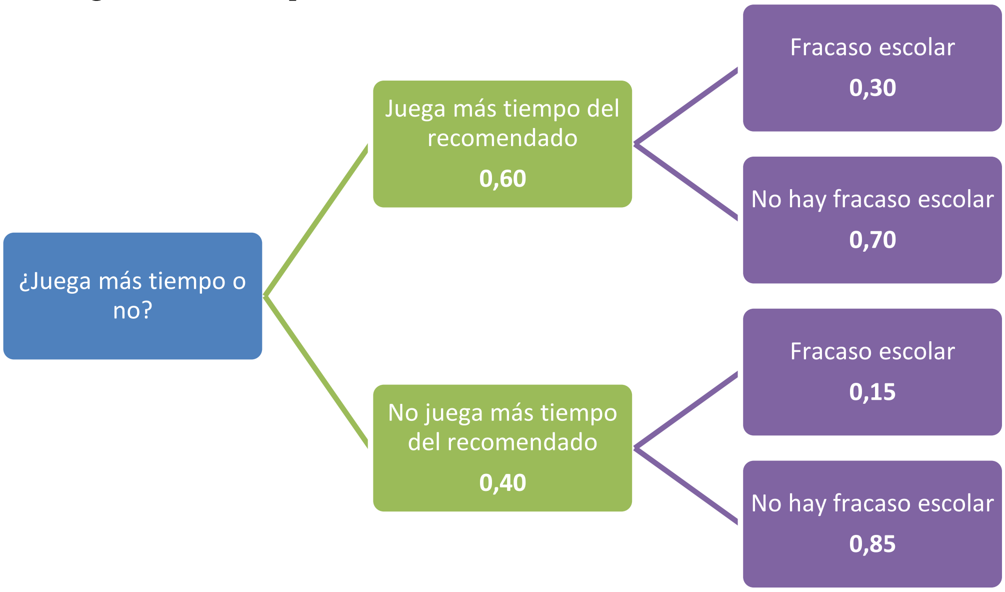
$$\int_{0}^{1} 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1^3}{3}\right] - \left[0 - \frac{0^3}{3}\right] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

El área es la suma del valor de las integrales calculadas:

$$Área = 1 - \frac{1}{e} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3} - \frac{1}{e} = 1,3\,u^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,
a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Realicemos un diagrama de árbol para aclarar la situación:



a)

$$P(\text{Fracaso escolar}) =$$
$$= P(\text{Juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar / Juega más tiempo}) +$$
$$+ P(\text{No juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar / No juega más tiempo}) =$$
$$= 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,18 + 0,06 = \boxed{0,24}$$

b)

$$P(\text{No juega más tiempo del recomendado / Fracaso escolar}) =$$
$$= \frac{P(\text{No juega más tiempo del recomendado} \cap \text{Fracaso escolar})}{P(\text{Fracaso escolar})} =$$
$$= \frac{P(\text{No juega más tiempo del recomendado}) \cdot P(\text{Fracaso escolar / No juega más tiempo})}{0,24} =$$
$$= \frac{0,4 \cdot 0,15}{0,24} = \frac{0,06}{0,24} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica σ = 1,5 kilogramos.
a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
b) Supóngase que μ = 6 kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5’75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

X= Peso en kilos de la mochila escolar de un niño de 5º y 6º de primaria.

X=N(μ, 1,5)

a)

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El intervalo de confianza tiene una amplitud igual al doble del error, siendo el error $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Planteamos la igualdad

$$\left. \begin{array}{l} Amplitud = 0,49 \\ z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{n}} = \frac{2,94}{\sqrt{n}} \end{array} \right\} \Rightarrow 0,49 = 2 \cdot \frac{2,94}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5,88}{0,49} = 12$$

$$n = 12^2 = 144$$

La muestra debe ser de más de 144 mochilas.

d)

Si X=N(μ, σ) la distribución de la media es una normal de parámetros $\overline{X}_{225} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso la media sigue una normal $\overline{X}_{225} = N\left(6, \frac{1,5}{\sqrt{225}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{225} = N(6, 0,1)$

$$P\left(\overline{X}_{225} \geq 5,75\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X}_{225} - 6}{0,1} \geq \frac{5,75 - 6}{0,1}\right) = P(Z \geq -2,5) = P(Z \leq 2,5) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla}\} = \boxed{0,9938}$$