OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \dfrac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Solución:

Efectuemos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $x \geq 10$

$x = 10$

x	y
10	0
10	20

¿(0,0) cumple? $0 \geq 10$ No

(b) $x \leq 20$

$x = 20$

x	y
20	0
20	20

¿(0,0) cumple? $0 \leq 20$ Sí

(c) $x \geq y/3$

$x = y/3$

x	y
0	0
10	30

¿(10,0) cumple? $10 \geq 0/3$, $10 \geq 0$ Sí

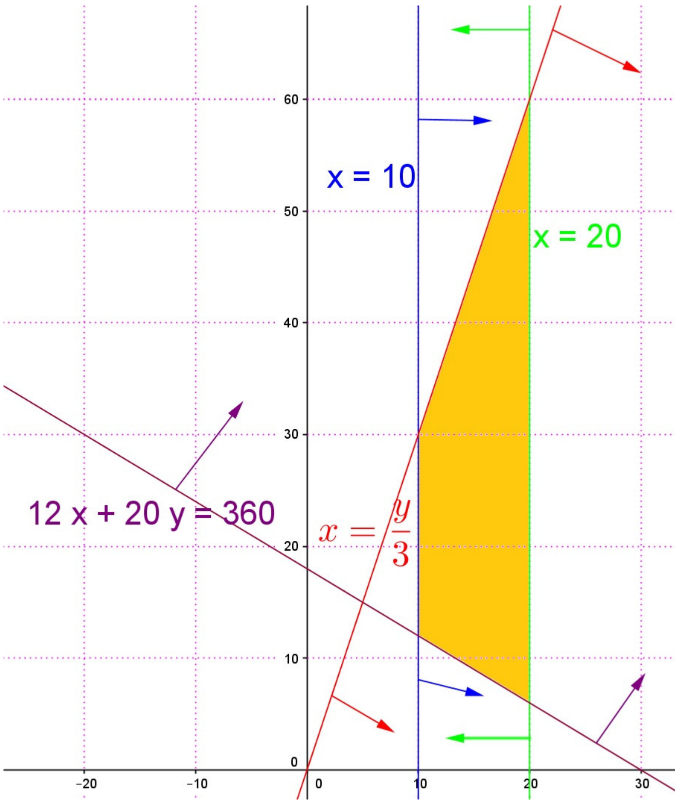
(d) $12x + 20y \geq 360$

$12x + 20y = 360$

x	y
0	18
30	0

¿(0,0) cumple? $12 . 0 + 20 . 0 \geq 360$, $0 \geq 360$ No

La representación gráfica será:



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de la zona sombreada.

Los vértices de la región factible los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Punto A, corte entre (a) y (c):

$$\begin{cases} x = 10 \\ x = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $10 = \dfrac{y}{3} \quad \rightarrow \quad y = 30$

Luego $A\ (\ 10\ ,\ 30\ )$

Punto B, corte entre (b) y (c):

$$\begin{cases} x = 20 \\ x = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $20 = \dfrac{y}{3} \quad \rightarrow \quad y = 60$

Por tanto, $B\ (\ 20\ ,\ 60\ )$

Punto C, corte entre (b) y (d):

$$\begin{cases} x = 20 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $12 \cdot 20 + 20\,y = 360$

$$240 + 20\,y = 360$$

$$20\,y = 360 - 240$$

$$20\,y = 120 \quad \rightarrow \quad y = \frac{120}{20} = 6$$

Luego, $C\ (\ 20\ ,\ 6\ )$

Punto D, corte entre (a) y (d):

$$\begin{cases} x = 10 \\ 12x + 20y = 360 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:* $12 \cdot 10 + 20\,y = 360$

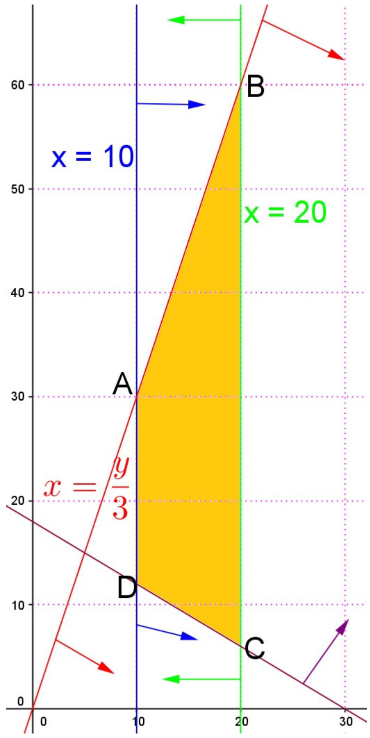
$$120 + 20\,y = 360$$

$$20\,y = 360 - 120$$

$$20\,y = 240 \quad \rightarrow \quad y = \frac{240}{20} = 12$$

Por tanto, $D\ (\ 10\ ,\ 12\ )$

Los vértices de la región son: A (10, 30), B (20 , 60), C (20 , 6) y D (10 , 12).



El mínimo de la función f(x,y) en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices,

x , y	*f(x,y) = x – 2 y*	
10 , 30	*10 – 2 . 30 =* **–** *50*	
20 , 60	*20 – 2 . 60 =* **–** *100*	*mínimo*
20 , 6	*20 – 2 . 6 = 8*	
10 , 12	*10 – 2 . 12 =* **–** *14*	

Por tanto, el mínimo de f(x,y) en esta región es – 100 y se alcanza en el punto (20 , 60).

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 3'7\,\frac{x+2}{x^2+21}, \qquad x \in [0,8],$$

donde *x* representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

a) Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
b) Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
c) Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

Solución:

$$f(x) = 3'7\,\frac{x+2}{x^2+21}, \qquad x \in [0,8], \qquad \begin{array}{l} x - \textit{horas desde apertura} \\ f(x) \; - \; \textit{euros} \end{array}$$

Por definición Dom f(x) = [0 , 8]

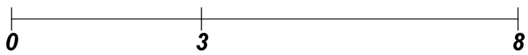
a) Máximo.

$$f'(x) = 3'7\,\frac{1.\left(x^2+21\right) - (x+2)\,2x}{\left(x^2+21\right)^2} = 3'7\,\frac{x^2+21-2x^2-4x}{\left(x^2+21\right)^2} = 3'7\,\frac{-x^2-4x+21}{\left(x^2+21\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 3'7\,\frac{-x^2-4x+21}{\left(x^2+21\right)^2} = 0 \;\to\; -x^2-4x+21 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,.\,(-1)\,.\,21}}{2\,.\,(-1)} == \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{-2} = \frac{4 \pm 10}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4+10}{-2} = \dfrac{14}{-2} = -7 \notin [0,8] \\ x_2 = \dfrac{4-10}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{array} \right.$$

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos



$$x = 1 \;\to\; f'(1) = \frac{-1^2 - 4\cdot 1 + 21}{\left(1^2+21\right)^2} = 3'7\cdot\frac{16}{22^2} > 0$$

$$x = 4 \;\to\; f'(4) = \frac{-4^2 - 4\cdot 4 + 21}{\left(4^2+21\right)^2} = 3'7\cdot\frac{-16-16+21}{\left(16+21\right)^2} = 3'7\cdot\frac{-11}{37^2} < 0$$

Luego:

Por tanto, en $x = 3$ hay un máximo relativo y como a la izquierda del 3 la función es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto.

$$x = 3 \;\to\; f(3) = 3'7\cdot\frac{3+2}{3^2+21} = 3'7\cdot\frac{5}{30} = 5'95$$

Por tanto, ***el precio de la acción alcanzó un valor máximo de 5´95 € al cabo de 3 horas de la apertura de la sesión.***

b) Mínimo.

Según lo estudiado en el apartado anterior el mínimo se alcanzará para $x = 0$ o $x = 8$

$$x = 0 \quad \to \quad f(0) = 35'7 \cdot \frac{0+2}{0^2+21} = 35'7 \cdot \frac{2}{21} = 3'40$$

$$x = 8 \quad \to \quad f(0) = 35'7 \cdot \frac{8+2}{8^2+21} = 35'7 \cdot \frac{10}{85} = 4'20$$

Por tanto, ***el precio de la acción alcanzó un valor mínimo de 3´40 € y fue en el momento de la apertura de la sesión.***

c) Utilizando los cálculos del apartado anterior.

Compra 20 acciones en el momento de la apertura, es decir, compra 20 acciones a 3´40 €/acción, entonces: coste = 20 . 3´40 = 68 €

Vende las 20 acciones a 4´20 €/acción, entonces: venta = 20 . 4´20 = 84

84 – 68 = 16

Obtuvo unas ganancias de 16€.

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?
b) Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

Solución:

Llamenos E = *tener experiencia*
F = *formación acorde*

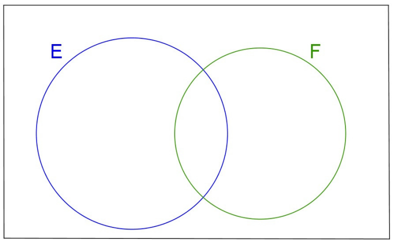
De los datos del problema sabemos,

"El 70% de los solicitantes tiene experiencia y, además, una formación acorde" $\rightarrow$ $P(E \cap F) = 0´70$

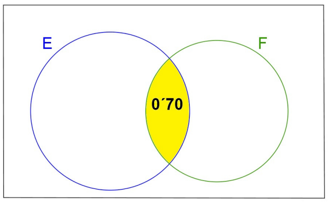
"Hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde" $\rightarrow$ $P(E \cap \overline{F}) = 0´20$

"Entre los solicitantes que tienen formación adecuada, un 87´5% tienen experiencia" $\rightarrow$ $P(E/F) = 0´875$

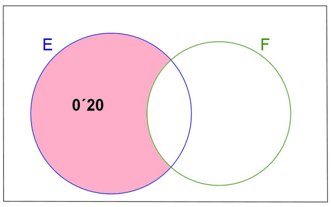
A partir de estos datos vamos a completar el diagrama de Venn de los sucesos E *y* F,



$P(E \cap F) = 0´70 \rightarrow$

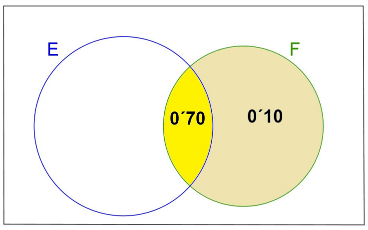


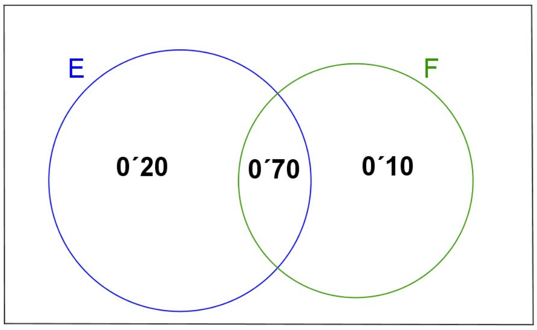
$P(E \cap \overline{F}) = 0´20 \rightarrow$



$P(E/F) = 0´875 \rightarrow \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = 0´875$

$\dfrac{0´70}{P(F)} = 0´875 \rightarrow P(F) = \dfrac{0´70}{0´875} = 0´8$ $\rightarrow$



Y finalmente, 

a) $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - (0´20 + 0´70) = 0´10$

La probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia es 0´10.

b) $P\left(F/_E\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0´70}{0´90} = 0´7778$

Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto es 0´7778.

c) $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = (\text{por leyes de Morgan}) = P\left(\overline{E \cup F}\right) = 1 - P(E \cup F) = 1 - (0´20 + 0´70 + 0´10) = 1 - 1 = 0$

La probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia es 0.

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Solución:

Llamando x = *puntuación obtenida en la 1ª pregunta*
y = *puntuación obtenida en la 2ª pregunta*
z = *puntuación obtenida en la 3ª pregunta*

De los datos del problema:

"Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos" $\rightarrow\ x+y+z=7'5$

"En la 3ª pregunta obtuvo un punto más que en la 2ª" $\rightarrow\ z=y+1\ \rightarrow\ y-z=-1$

"los puntos que consiguió en la 1ª quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la 3ª y 1ª" $\rightarrow\ x=5(z-x)\ \rightarrow\ x=5z-5x\ \rightarrow\ x+5x-5z=0\ \rightarrow\ 6x-5z=0$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=7'5 \\ \quad y-z=-1 \\ 6x \quad -5z=0 \end{cases}$

Este sistema podemos resolverlo por sustitución, despejando la y de la 2ª ecuación y la x de la 3ª.

$$\begin{cases} x+y+z=7'5 \\ \quad y-z=-1 & \qquad y=z-1 \\ 6x \quad -5z=0 & \qquad 6x=5z \rightarrow x=\dfrac{5z}{6} \end{cases}$$

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$\frac{5z}{6}+z-1+z=7'5$$
$$\frac{5z}{6}+z+z=7'5+1$$
$$\frac{5z+6z+6z}{6}=8'5$$
$$17z=6\cdot 8'5$$
$$17z=51$$
$$z=\frac{51}{17}=3$$
$$y=3-1=2$$
$$x=\frac{5\cdot 3}{6}=\frac{15}{6}=2'5$$

Solución: $x=2'5,\quad y=2,\quad z=3$

También podemos resolverlo por determinantes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-5-6-6=-17\neq 0$, *podemos resolverlo por Cramer.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7{\acute{}}5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-5 \cdot 7{\acute{}}5 - 5}{-17} = \frac{-42{\acute{}}5}{-17} = 2{\acute{}}5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7{\acute{}}5 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{5 - 6 \cdot 7{\acute{}}5 + 6}{-17} = \frac{-34}{-17} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7{\acute{}}5 \\ 0 & - & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-6 - 6 \cdot 7{\acute{}}5}{-17} = \frac{-51}{-17} = 3$$

Solución: $x = 2{\acute{}}5, \quad y = 2, \quad z = 3$

Solución: en la primera pregunta obtuvo 2´5 puntos, en la segunda 2 puntos y en la tercera 3 puntos.

Problema 2. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \le 3 \\ \dfrac{2}{a - x} & x > 3 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de *a* para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en x = 3.

Condiciones de continuidad

1) $f(3) = 3^3 - 3 \,.\, 3 - 20 = 27 - 9 - 20 = -2$, existe f(3)

$$2) \quad \underset{x\to 3}{Lím}\, f(x) = \begin{cases} \underset{x\to 3^-}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to 3^-}{Lím}\left(x^3 - 3x - 20\right) = 3^3 - 3\,.\,3 - 20 = -2 \\ \underset{x\to 3^+}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\dfrac{2}{a-x}\right) = \dfrac{2}{a-3} \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben coincidir, $-2 = \dfrac{2}{a-3}$,

$$-2(a-3) = 2 \;\rightarrow\; a - 3 = \frac{2}{-2} \;\rightarrow\; a - 3 = -1 \;\rightarrow\; a = -1 + 3 \;\rightarrow\; a = 2$$

*Luego, **para que f(x) sea continua en x = 3 debe ser a = 2.***

b) Para a = 0, ¿monotonía?.

$$Para\ a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20, & x \le 3 \\ \dfrac{2}{-x} = \dfrac{-2}{x}, & x > 3 \end{cases}$$

Por ser función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

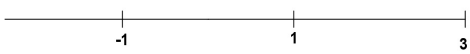
Para x < 3

$f(x) = x^3 - 3x - 20$, estudiemos el signo de $f´(x)$

$f´(x) = 3x^2 - 3$

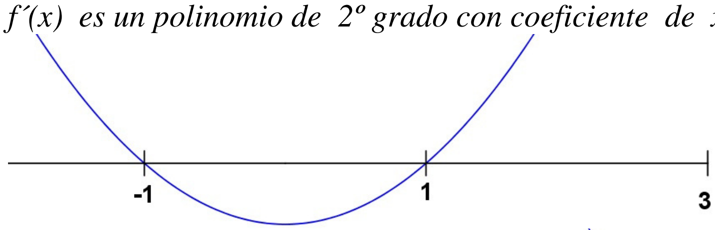
$$3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 = 3 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{3}{3} \;\rightarrow\; x^2 = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Hay que estudiar el signo de $f´(x)$ en los siguientes intervalos:

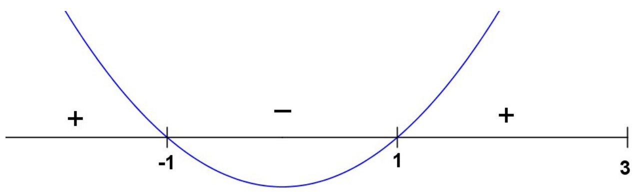


y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por x = 4´5:

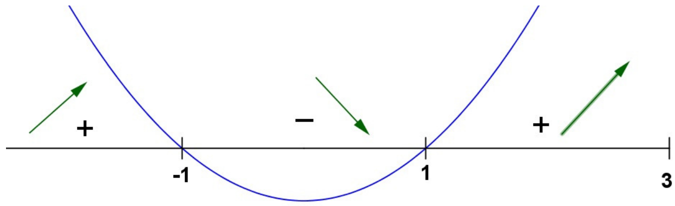
$f´(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, por tanto:



En cada intervalo el signo de $f´(x)$ es:



Y el crecimiento y decrecimiento será



Para $x > 3$

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$, es una fracción, numerador positivo y como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo). Por tanto el signo de $f'(x)$ es positivo.

Para $x > 3$, la función es creciente.

Veamos si existe $f'(3)$

$$f'(3) = \begin{cases} f'(3^-) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 \\ f'(3^+) = \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{9} \end{cases} \qquad 24 \neq \frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad No\ existe \quad f'(3)$$

Por tanto, ***f(x) es creciente en $(-\infty , -1) \cup (1 , 3) \cup (3 , +\infty)$ y decreciente en $(-1 , 1)$.***

c) Para $a = 0$, ¿extremos?

De lo estudiado en el apartado anterior:

Por tanto $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.

$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \,.\, (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18$

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 3 \,.\, 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22$

Finalmente, f(x) tiene un máximo local en $(-1 , -18)$ y un mínimo local en $(1 , -22)$.

Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

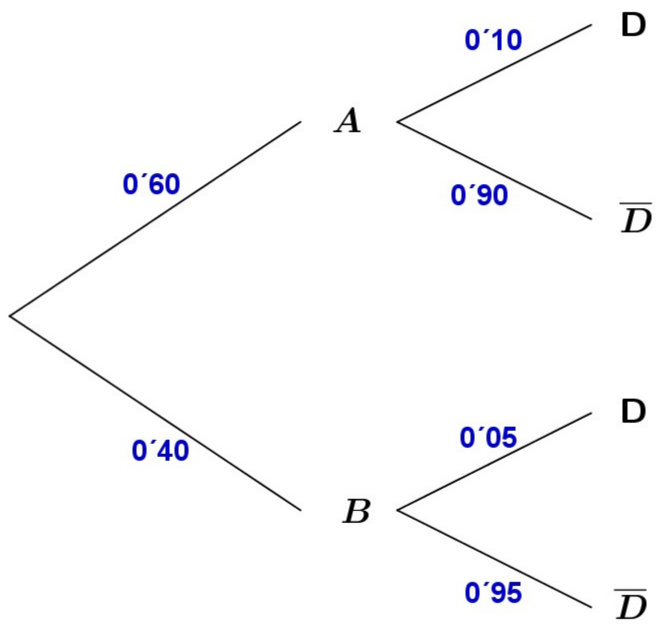
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
A = componente procede de la máquina A
B = componente procede de la máquina B
D = componente es defectuoso

Considerando todos los datos del enunciado, el árbol del problema será:



a) $P(D) = 0'60 \cdot 0'10 + 0'40 \cdot 0'05 = 0'08$

b)

$$P\left(A/\overline{D}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(\overline{D})} = \frac{0'60 \cdot 0'90}{1 - P(D)} = \frac{0'54}{1 - 0'08} = \frac{0'54}{0'92} = 0'5870$$

c) $P(D \cap B) = 0'40 \cdot 0'05 = 0'02$