OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y el vector } c = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ se pide :}$$

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1}. *(2 + 4 puntos)*
b) Determina el vector x que verifica $A\,x = B^t\,c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. *(4 puntos)*

Solución:
a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 = 1.$$ ***Por tanto,*** $|A| = 1$

Como $|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$

Cálculo de A^{-1},

$$A \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) ¿Vector x*?* / $A\,x = B^t\,c$

Calculemos $B^t\,c$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad luego \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-2) - 1(-1) + 2\cdot 3 \\ -2(-2) + 2(-1) - 1\cdot 3 \\ 0(-2) + 2(-1) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1+6 \\ 4-2-3 \\ 0-2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Luego, $A\,x = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, *multiplicando por la izquierda por* A^{-1},

$$A^{-1}\,A\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad I\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1(-1) + 6 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 5 \cdot 7 \\ 2 \cdot 5 - 1(-1) + 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 1 + 42 \\ 10 + 1 + 35 \\ 10 + 1 + 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 58 \\ 36 \\ 49 \end{pmatrix}$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones

$$I(x) = 4x - 9 , \quad C(x) = 0{,}01\, x^2 + 3x$$

donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

a) Calcula la función de beneficios. *(1 punto)*

b) ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo? *(1 punto)*
¿Cuál es dicho beneficio máximo? *(1 punto)*

c) Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función. *(5 puntos)*

d) Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas. *(2 puntos)*

Solución:

Tenemos las funciones: $I(x) = 4x - 9$, $C(x) = 0{,}01\, x^2 + 3x$, *en las que* x *es el precio de venta de la mochila (en euros), por lo que,* $x \geq 0$. $I(x)$ *y* $C(x)$ *representan miles de euros.*

a) Función de beneficios, B(x), en miles de euros.

$B(x) = I(x) - C(x) = 4x - 9 - (0{,}01\, x^2 + 3x) = 4x - 9 - 0{,}01\, x^2 - 3x = - 0{,}01\, x^2 + x - 9,\ x \geq 0.$

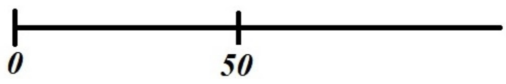
Solución: la función de beneficios es $\boldsymbol{B(x) = - 0{,}01\, x^2 + x - 9,\ x \geq 0.}$

b) Máximo de B(x)

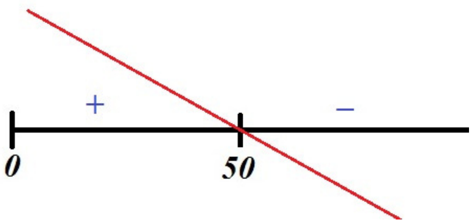
$B'(x) = - 0'02\, x + 1$

$B'(x) = 0 \ \rightarrow\ - 0'02\, x + 1 = 0 \ \rightarrow\ - 0'02\, x = - 1 \ \rightarrow\ x = \dfrac{-1}{-0'02} = 50$

Hay que estudiar el signo de $B'(x)$ *en los intervalos:*



$B'(x)$ *es una línea recta de pendiente negativa que pasa por (50,0), por lo que:*



Por tanto, en $x = 50$ *hay un máximo relativo de B(x) que, además es el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

Para $x = 50$, $B(50) = - 0{,}01 \cdot 50^2 + 50 - 9 = 16.$

Solución: para que el beneficio sea máximo el precio de venta de las mochilas ha de ser de 50 euros y el beneficio máximo será de 16 miles de euros, es decir, 16000 euros.

c) $B(x) = -0{,}01\,x^2 + x - 9,\ x \geq 0.$ *¿Puntos de corte con ejes, monotonía y representación?*

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$x = 0 \ \rightarrow\ B(0) = -9 \ \rightarrow\ (0, -9)$

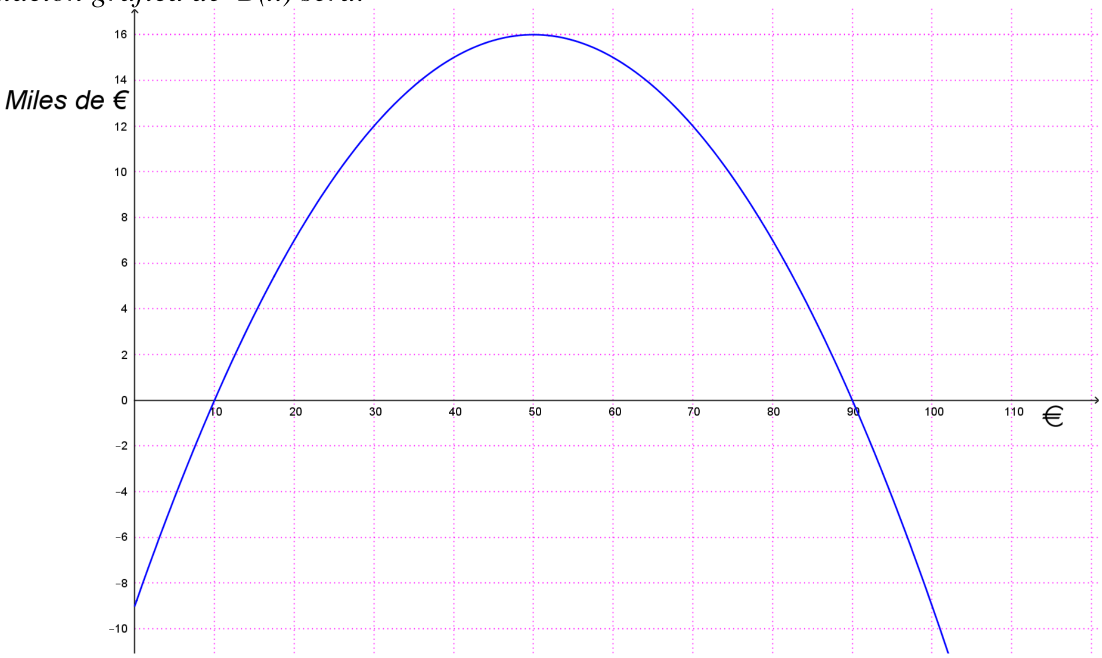
$$B(x)=0 \ \rightarrow\ -0'01x^2+x-9=0 \ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-0'01)(-9)}}{2(-0'01)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-0'36}}{-0'02}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{0'64}}{-0'02}=\frac{-1\pm 0'8}{-0'02}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+0'8}{-0'02}=10 \ \rightarrow\ (10,0) \\ x_2=\dfrac{-1-0'8}{-0'02}=90 \ \rightarrow\ (90,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , – 9), (10 , 0) y (90 , 0).

Según vimos en el apartado (b) ***B(x) es creciente en el intervalo (0 , 50) y decreciente en (50 , +∞)*** *y su máximo es (50 , 16).*

La representación gráfica de B(x) será:



d) La empresa tiene pérdidas cuando los valores de la función de beneficios son negativos.

Según lo visto en el apartado anterior, la empresa tendría pérdidas en los intervalos [0 , 10) y (90 , +∞).

Es decir, para precios de venta de las mochilas entre 0 € y 10€ y a partir de 90€ la empresa tendría pérdidas (10€ y 90€ excluidos, *para ellos el beneficio es nulo****).***

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

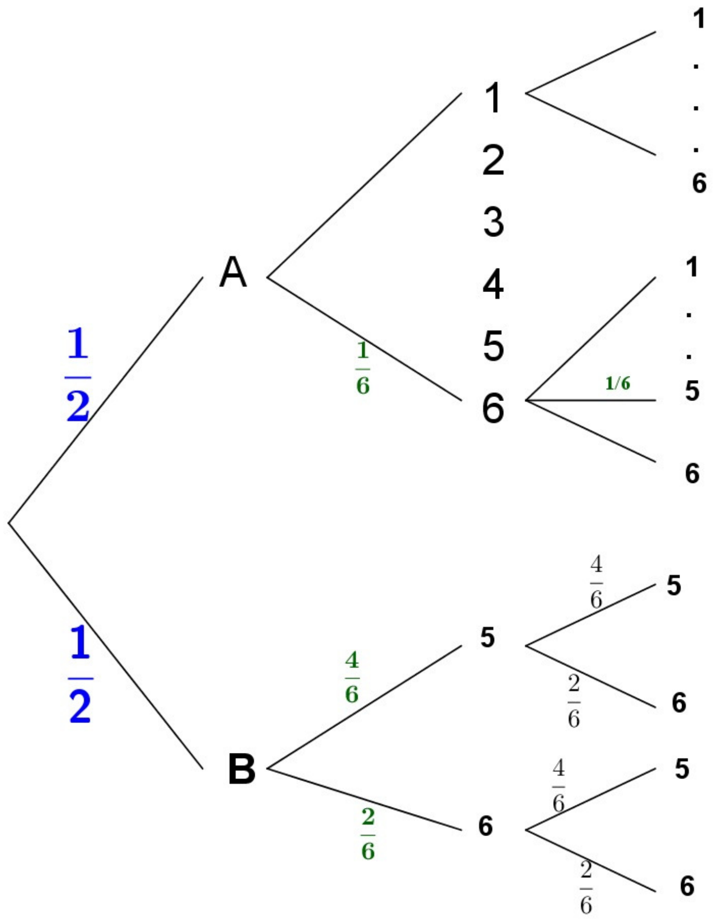
Problema 3. Un dado normal tiene sus caras numeradas del número 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda. *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11. *(3 puntos)*

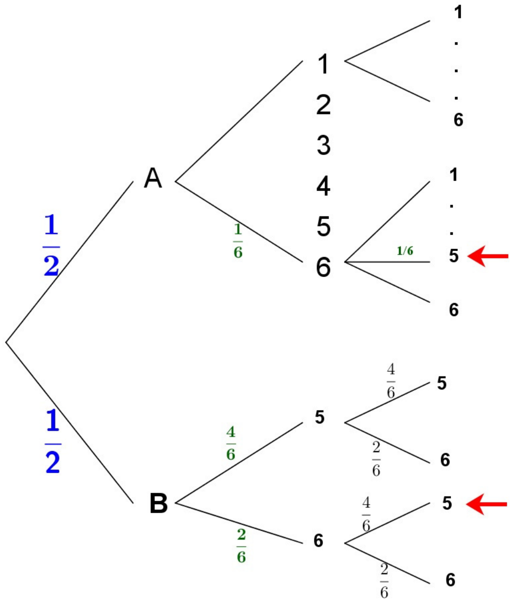
c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? *(4 puntos)*

Solución:
Dado normal, A, sus caras = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Dado trucado, B, sus caras = { 5, 5, 5, 5, 6, 6 }
Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido, el árbol del problema es:
(el árbol no está completo para que no sea enorme, sólo dibujamos las ramas más necesarias)



a) P(1ª tirada 6 y 2ª tirada 5)

1ª tirada 6 y 2ª tirada 5 se puede obtener con el dado A o con el dado B, los resultados correspondientes los marcamos en el árbol:



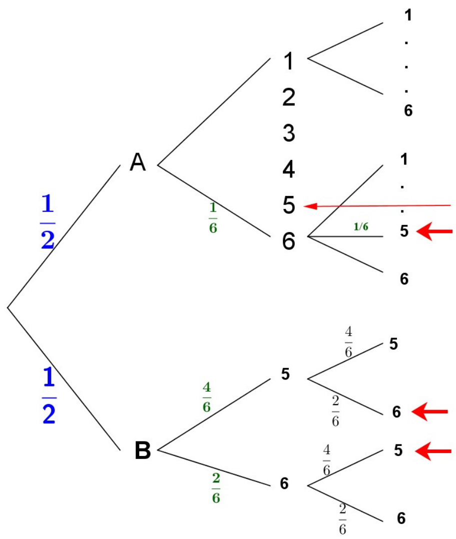
Por tanto,

$$P(\,1^a \text{ tirada } 6 \text{ y } 2^a \text{ tirada } 5) = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{4}{6} = \frac{1}{72} + \frac{9}{72} = \frac{1}{8}$$

Solución: 1/8

b) P(suma de las dos tiradas sea 11)

La suma de las dos tiradas sea 11 se obtiene cuando $\left\langle \begin{matrix} \text{Dado} \quad A & \begin{matrix} 5+6 \\ 6+5 \end{matrix} \\ \text{Dado} \quad B & \begin{matrix} 5+6 \\ 6+5 \end{matrix} \end{matrix} \right.$*, los resultados correspondientes los marcamos en el árbol:*



Por tanto,

P(suma de las dos tiradas sea 11)=

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{6}\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\frac{4}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{36}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{16}{36}\right) = \frac{1}{36} + \frac{8}{36} = \frac{1}{4}$$

Solución: 1/4

c) Definimos los sucesos: B = dado es trucado y R = obtener 6 en la 1ª tirada y 5 en la 2ª.

La probabilidad a calcular es: $P\left(B/_{R}\right)$*. Calculémosla:*

(Según obtuvimos en el apartado (a) P(R) = 1/8)

$$P\left(B/_{R}\right) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{4}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

Solución: 8/9

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.

b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.

c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.
Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando x = *cantidad invertida en cuenta de ahorro (5%)*
y = *cantidad invertida en depósito (7%)*
z = *cantidad invertida en bonos (9%)*

De los datos del problema,

Invirtió un total de 42000 € entre tres productos:	$x + y + z = 42.000$
Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €:	$0'05\,x + 0'07\,y + 0'09\,z = 2600$
Los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones:	$0'05\,x = 0'07\,y + 0'09\,z - 200$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones,

$0'05\,x + 0'07\,y + 0'09\,z = 2600 \rightarrow 5\,x + 7\,y + 9\,z = 260.000$

$0'05\,x = 0'07\,y + 0'09\,z - 200 \rightarrow 5\,x = 7\,y + 9\,z - 20.000 \rightarrow 5\,x - 7\,y - 9\,z = -20.000$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x+y+z=42000 \\ 5x+7y+9z=260000 \\ 5x-7y-9z=-20000 \end{cases}$. *Lo resolvemos por Gauss,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 5 & 7 & 9 & 260000 \\ 5 & -7 & -9 & -20000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 5x\,F_1 \\ F_3 - 5x\,F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & -12 & -14 & -230000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3 + 6x\,F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & 0 & 10 & 70000 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow 10\,z = 70000 \rightarrow z = \dfrac{70000}{10} = 7000$

De $F_2 \rightarrow 2\,y + 4\,z = 50000 \rightarrow 2\,y + 4\,.\,7000 = 50000 \rightarrow 2\,y + 28000 = 50000 \rightarrow$
$2\,y = 50000 - 28000 \rightarrow 2\,y = 22000 \rightarrow y = \dfrac{22000}{2} = 11000$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 42000 \rightarrow x + 11000 + 7000 = 42000 \rightarrow x + 18000 = 42000 \rightarrow$
$x = 42000 - 18000 \rightarrow x = 24000$

Solución: en la cuenta de ahorro invirtió 24000 euros, en el depósito 11000 euros y en los bonos 7000 euros.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una explotación minera extrae $f(t)=30+\frac{3}{2}t-\frac{1}{800}t^3$ Toneladas de carbón por año, donde la variable *t* indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

a) Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor. *(5 puntos)*

b) Si se necesita extraer como mínimo 10 Toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si en el año t = 40 es rentable. *(2 puntos)*

c) ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta. *(3 puntos)*

Solución:

$$f(t)=30+\frac{3}{2}t-\frac{1}{800}t^3 \quad \begin{cases} t \equiv \text{años desde inicio explotación} \\ f(t) \equiv \text{Toneladas/año} \end{cases} \qquad \text{como } t \text{ son años, } t \geq 0$$

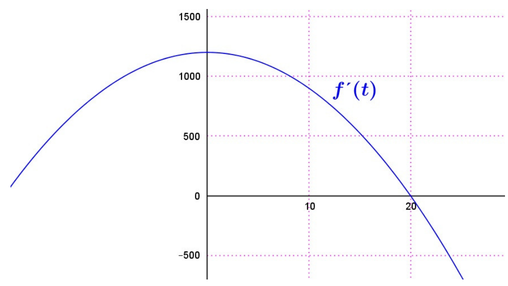
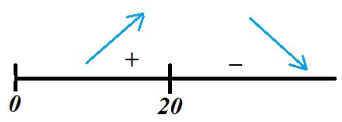
a) Máximo.

$$f'(t)=\frac{3}{2}-\frac{1}{800}3t^2=\frac{1200-3t^2}{800}$$

$$\frac{1200-3t^2}{800}=0 \;\rightarrow\; 1200-3t^2=0 \;\rightarrow\; 1200=3t^2 \;\rightarrow\; t^2=\frac{1200}{3} \;\rightarrow\; t^2=400 \;\rightarrow$$

$$t=\pm\sqrt{400}=\pm 20, \quad \text{como } t\geq 0, \quad t=20$$

Estudiemos la monotonía de f(t),

$f'(t)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de t^2 negativo y raíces – 20 y 20. Gráficamente $f'(t)$ será:		*Luego, el signo de $f'(t)$:*	

Por tanto, f(t) es creciente en el intervalo (0 , 20) y decreciente en (20 , +∞). Luego el máximo relativo de f(t) se alcanza para t = 20 y, además, es el absoluto ya que f(t) a su izquierda es creciente y a su derecha decreciente.

Para $t = 20, \quad f(20) = 30+\frac{3}{2}\cdot 20-\frac{1}{800}20^3=50$

Finalmente, ***el máximo de extracción se alcanza a los 20 años de inicio de la explotación y este máximo es de 50 toneladas.***

b) Para que la explotación sea rentable, según el enunciado, $f(t)\geq 10$

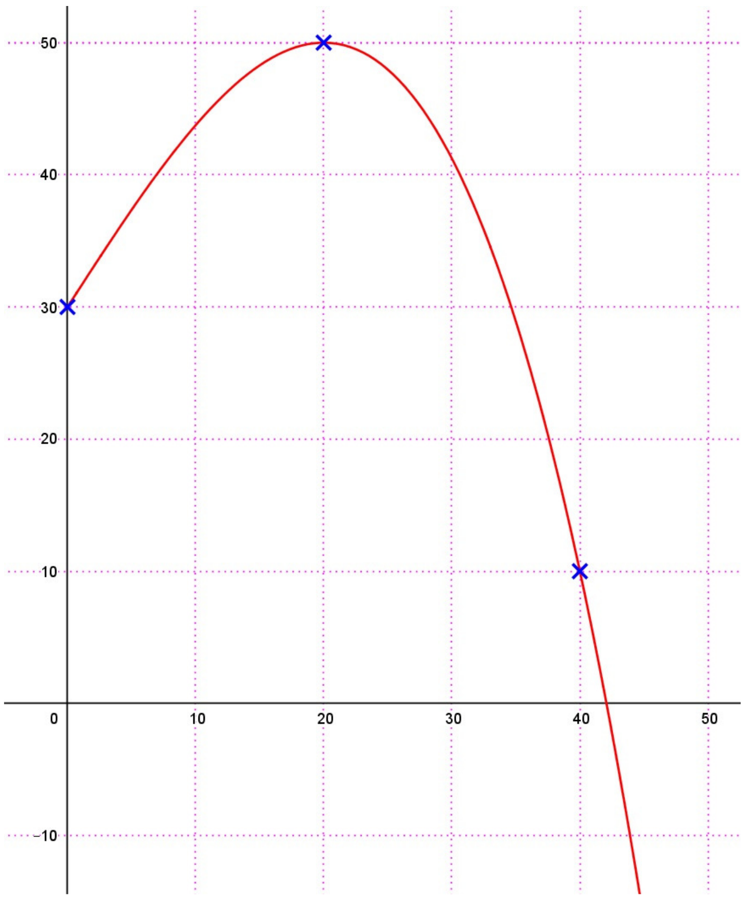
Para $t = 40, \quad f(40) = 30+\frac{3}{2}\cdot 40-\frac{1}{800}40^3=10 \; (\geq 10)$

Luego, ***al cabo de 40 años de inicio de la explotación (t = 40) la explotación es rentable (f(40) = 10).***

c) Considerando lo estudiado en el apartado (a), como $f(t)$ es decreciente en $(20, +\infty)$ entonces para valores de $t > 40$ $f(t) < 10$ (en apartado (b) obtuvimos que $f(40) = 10$).
Por tanto, ***a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.***

Otra forma de resolverlo:
Representar la función $f(t)$.
De esta función sabemos:
$t = 0 \rightarrow f(0) = 30 \rightarrow (0, 30)$
$t = 40 \rightarrow f(40) = 10 \rightarrow (40, 10)$
es creciente en $(0, 20)$ y
decreciente en $(20, +\infty)$
máximo $(20, 50)$

Su representación es:



A partir de $t = 40$ $f(t) < 10$, por lo que ***a partir de 40 años no hay periodo de tiempo en que la explotación sea rentable.***

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 3. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, d, e\}$ y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\overline{B}$ el suceso contrario o complementario de B, calcula:

a) $P(A \cap B)$. (2 puntos)

b) $P(A \cup \overline{B})$. (2 puntos)

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. (2 puntos)

d) $P\left(A/\overline{B}\right)$. (2 puntos)

e) $P\left(B/A\right)$. (2 puntos)

Solución:

$\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$.

Como Ω es el espacio muestral del experimento $\rightarrow$ $P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1$, sustituyendo los valores de las probabilidades conocidas:

$$\frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 \rightarrow P(b) + \frac{5}{6} = 1 \rightarrow P(b) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$A = \{a, b, c\} \rightarrow \overline{A} = \{d, e\}$ y $B = \{b, d, e\} \rightarrow \overline{B} = \{a, c\}$

a) $A \cap B = \{b\} \rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \frac{1}{6}$ **$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$**

b) $A \cup \overline{B} = \{a, b, c\} \rightarrow P(A \cup \overline{B}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$ **$P(A \cup \overline{B}) = \frac{5}{12}$**

c) $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing \rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\varnothing) = 0$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0$

d) $P\left(A/\overline{B}\right)$

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \left\{\begin{array}{l} A \cap \overline{B} = \{a, c\} \rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(a) + P(c) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \\ \overline{B} = \{a, c\} \rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$P\left(A/\overline{B}\right) = 1$

e) $P\left(B/A\right)$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\left\{\begin{array}{l} P(B\cap A)=\frac{1}{6} \quad \{obtenido\ en\ apartado\ (a)\} \\ \\ A=\{a,b,c\} \quad \rightarrow \quad P(A)=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{5}{12} \quad \{apartado\ (a)\} \end{array}\right\}=\frac{1/6}{5/12}=\frac{2}{5}$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{2}{5}$$