PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B.**

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad para \quad x \neq -1.$$

(a) [1,5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (1,1). (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

(a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta ***r*** que equidistan de los planos π_1 y π_2.

(b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B.**

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x$.

(a) [1,25 puntos] Determina ***a*** sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

(b) [1,25 puntos] Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-3)$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

(b) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

considera el sistema de ecuaciones dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de ***m***.

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Considera la función *f* definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad para \quad x\neq -1.$$

(a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

(b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(a)

Asíntotas verticales: x = a.

Siendo **a** el valor excluido del dominio. La asíntota es $x=-1$

Comprobemos el límite:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3+4}{0}=\frac{2}{0}=\infty$$

Asíntotas horizontales: y = b. Siendo $b=\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Calculemos $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: y = mx + n.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+4\right)\cdot 2-x\left(2x+2\right)}{\left(2x+2\right)2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}+6x+8-\cancel{2x^2}-2x}{4x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4x}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=\frac{1}{2}x+1$

(b) Necesitamos la derivada de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-\left(x^2+3x+4\right)(2)}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+6x+6-\left(2x^2+6x+8\right)}{(2x+2)^2}$$

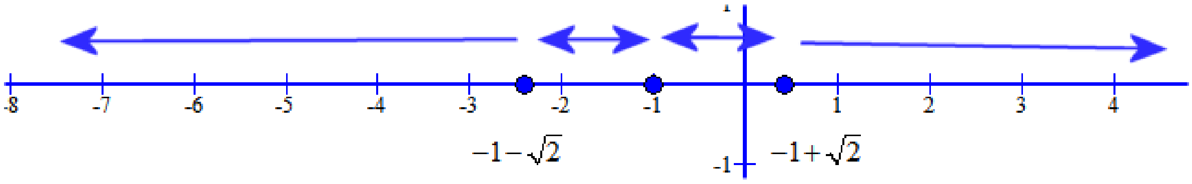
$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$$

Igualamos a cero y…

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+16}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{4}=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{4}=-1\pm\sqrt{2}$$

Tendremos 3 puntos a considerar para el cambio de signo de la derivada: -1; $-1-\sqrt{2}$ y $-1+\sqrt{2}$.
Por lo tanto la recta real se divide en 4 zonas:



Estudiemos el signo en cada zona:

En la semirrecta $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$ tomamos el valor x = –4 →

$$f'(-4)=\frac{2(-4)^2+4(-4)-2}{\left(2(-4)+2\right)^2}=\frac{32-16-2}{+}>0$$. La función crece.

En el intervalo $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$ tomamos el valor x = –2 →

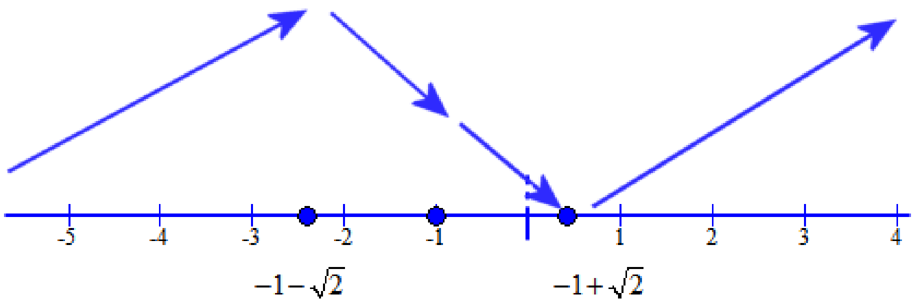
$$f'(-2)=\frac{2(-2)^2+4(-2)-2}{\left(2(-2)+2\right)^2}=\frac{8-8-2}{+}<0$$. La función decrece.

En el intervalo $\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$ tomamos el valor x = 0 → $f'(0)=\frac{2(0)^2+4(0)-2}{\left(2(0)+2\right)^2}=\frac{-2}{+}<0$. La función decrece.

En la semirrecta $\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos el valor x = 4 →

$$f'(4)=\frac{2(4)^2+4(4)-2}{\left(2(4)+2\right)^2}=\frac{32+16-2}{+}>0$$. La función crece

El esquema es:



La función crece en $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (1,1). (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

Calculemos la integral indefinida pedida:

$$\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx\\ dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt\end{array}\right\}=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{1}{t}dt=\int\frac{1+t}{t(1-t)}dt=$$

$$=\{\text{Integración por descomposición en fracciones simples}\}$$

$$\frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}\Rightarrow\frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A(1-t)+Bt}{t(1-t)}\Rightarrow 1+t=A(1-t)+Bt$$

$$\text{Tomando } t=1\Rightarrow 1+1=A\cdot 0+B\Rightarrow B=2$$

$$\text{Tomando } t=0\Rightarrow 1+0=A\cdot 1+B\cdot 0\Rightarrow A=1$$

Nuestra integral se descompone en la suma de dos integrales más sencillas:

$$\int\frac{1+t}{t(1-t)}dt=\int\frac{1}{t}dt+\int\frac{2}{1-t}dt=\ln t-2\ln(1-t)=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=e^x\end{array}\right\}=$$

$$=\ln e^x-2\ln\left|1-e^x\right|=\boxed{x-2\ln\left|1-e^x\right|+C}$$

La primitiva es $F(x)=x-2\ln\left|1-e^x\right|+C$. Como nos piden además que pase por el punto (1,1), se debe cumplir que $F(1)=1\Rightarrow F(1)=1-2\ln\left|1-e^1\right|+C=1\Rightarrow -2\ln|1-e|+C=0\Rightarrow C=2\ln|1-e|$

La primitiva pedida es $F(x)=x+2\ln\left|1-e^x\right|+2\ln|1-e|$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}AX=XA\\ a+d=1\Rightarrow a=1-d\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-d&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-d&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-c&-d\\1-d&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&-1+d\\d&-c\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-c=b\\ -d=-1+d\\ 1-d=d\\ b=-c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=-c\\ 1=2d\end{array}\right\}\Rightarrow d=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Las matrices son $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-c\\c&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y determinante vale 1

$$|X|=1\Rightarrow\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -c\\ c & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+c^2=1\Rightarrow c^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

Las matrices son $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ o $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Considera la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.

(a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta ***r*** que equidistan de los planos π_1 y π_2.

(b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

(a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=2+3\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right\}$$ Un punto de la recta r tiene coordenadas $P_r(2-\lambda,2+3\lambda,1+\lambda)$

Este punto si equidista de los planos debe cumplir:

$$\text{distancia}(P_r,\pi_1)=\text{distancia}(P_r,\pi_2)$$

$$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{1}}=\frac{|2+3\lambda|}{\sqrt{1}}$$

$$|2-\lambda|=|2+3\lambda|\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2-\lambda=2+3\lambda\Rightarrow 0=4\lambda\Rightarrow\lambda=0\\ 2-\lambda=-(2+3\lambda)\Rightarrow 2-\lambda=-2-3\lambda\Rightarrow 2\lambda=-4\Rightarrow\lambda=-2\end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 tienen coordenadas

$$\left.\begin{array}{l}P_r(2-\lambda,2+3\lambda,1+\lambda)\\ \lambda=0\end{array}\right\}\Rightarrow P_r(2,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}P_r(2-\lambda,2+3\lambda,1+\lambda)\\ \lambda=-2\end{array}\right\}\Rightarrow P_r(4,-4,-1)$$

(b) Llamemos s a la recta definida por los planos π_1 y π_2. Obtengamos de su ecuación el vector director:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1\equiv x=0\\ \pi_2\equiv y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=(0,0,1)$$

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \vec{v_r} = (-1,3,1)$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas los vectores directores deben ser proporcionales, y estos no los son. Por lo que solo cabe la posibilidad de que se corten o crucen.

Tomemos un tercer vector que vaya de un punto de la recta s a otro de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow P_r(2,2,1) \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow P_s(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_sP_r} = (2,2,1)-(0,0,0) = (2,2,1)$$

Veamos si son linealmente dependientes o independientes los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-2+0-(0+0+6) = -8 \neq 0$$

Por lo que las rectas se cruzan.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-a)e^x$.

(a) **[1,25 puntos]** Determina ***a*** sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

(b) **[1,25 puntos]** Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

(a) La derivada de la función es $f(x) = (x-a)e^x \Rightarrow f\,'(x) = e^x + (x-a)e^x = (1+x-a)e^x$

La igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos:

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow (1+x-a)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x-a=0 \Rightarrow x = a-1 \\ e^x = 0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Como el punto crítico debe ser $x=0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

(b) Si $a=1$ entonces la función es $f(x) = (x-1)e^x$ y su derivada $f\,'(x) = (1+x-1)e^x = xe^x$

La derivada segunda será: $f\,'(x) = xe^x \Rightarrow f\,''(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

Si igualamos a cero la segunda derivada

$$f\,''(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \Rightarrow x=-1 \\ e^x = 0; \text{ No es posible} \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes de x = –1 y después de x = –1.

En $(-\infty,-1)$ tomamos el valor x = –2 → $f\,''(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0$

En $(-1,+\infty)$ tomamos el valor x = 0 → $f\,''(0) = (1+0)e^0 = 1 > 0$

La función presenta un punto de inflexión en x = –1.

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

(a) **[1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

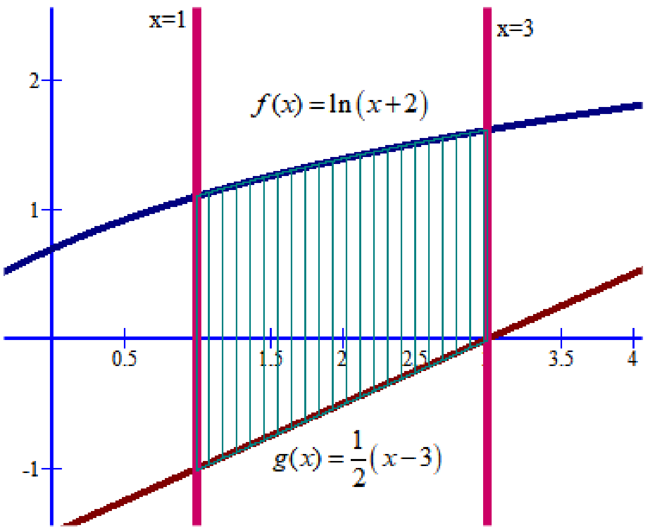
(b) **[1,5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

(a) Hacemos una tabla de valores para cada función.

x	$f(x)=\ln(x+2)$
-2	$\ln 0=-\infty$; No existe pero es una asintota
-1	$\ln(1)=0$
0	$\ln 2=0,69$
4	$\ln 6=1,79$

x	$g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$
1	-1
2	$-\frac{1}{2}$
3	0

El recinto será:



(b) El área del recinto es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 1 y 3. Calculemos primero la integral definida de la función *f.*

$$\int \ln(x+2)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=\ln(x+2)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x+2}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}=x\cdot\ln(x+2)-\int x\frac{1}{x+2}dx=$$

$$= x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx = x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx =$$

$$= x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = x\cdot\ln(x+2) - \int dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx =$$

$$= x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)$$

El área será:

$$\int_1^3 \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)dx = \int_1^3 \ln(x+2)dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x-3dx =$$

$$= \left[x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 =$$

$$= \left(3\cdot\ln(3+2) - 3 + 2\ln(3+2)\right) - \left(1\cdot\ln(1+2) - 1 + 2\ln(1+2)\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1\right)\right] =$$

$$= 5\ln 5 - 3 - 3\ln 3 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} + 3\right) = 5\ln 5 - 2 - 3\ln 3 + 1 = -1 + 5\ln 5 - 3\ln 3 = \boxed{3,75\ u^2}$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de ***m***.

$$X^tA = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left((2-m)x + y + mz \quad x + my + z \quad (2m-1)x + y + z\right) = \begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2-m)x + y + mz = 2m^2-1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

Discutamos el sistema. Para ello considero la matriz de coeficientes:

$$B = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante

$$|B|=\begin{vmatrix} 2-m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2-m)m+2m-1+m-\left[m^2(2m-1)+1+2-m\right]=$$

$$=2m-\cancel{m^2}+2m-1+m-2m^3+\cancel{m^2}-3+m=-2m^3+6m-4$$

Igualamos a cero y $-2m^3+6m-4=0\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 6 & -4 \\ 1 & & -2 & -2 & 4 \\ \hline & -2 & -2 & 4 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow m=1$ es raíz

Y resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$-2m^2-2m+4=0\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{-4}=\frac{2\pm 6}{-4}=\begin{cases} m=\dfrac{2+6}{-4}=-2 \\ m=\dfrac{2-6}{-4}=1 \end{cases}$$

Distinguiremos 3 casos diferentes:

CASO 1. $m\neq 1;\ m\neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única. Existe una única matriz X que cumpla la ecuación $X^tA=B^t$.

CASO 2. $m=1$

Para este valor el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow x+y+z=1$$

Se observa que las tres ecuaciones son iguales. Este sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m=-2$

Para este valor el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-2z=7 \\ x-2y+z=-2 \\ -5x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 4x+y-2z=7 \\ -5x+y+z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 2^{\text{a}}-4\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ -4x & +8y & -4z & =8 \\ 4x & +y & -2z & =7 \\ \hline & 9y & -6z & =15 \end{array}\right\}\text{ y también }\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}}+5\cdot\text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 5x & -10y & +5z & =-10 \\ -5x & +y & +z & =1 \\ \hline & -9y & +6z & =-9 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 9y-6z=15 \\ -9y+6z=-9 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}}+\text{Ecuación } 2^{\text{a}}} \\ 9y & -6z & =15 \\ -9y & +6z & =-9 \\ \hline & 0 & =6 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 9y-6z=15 \\ 0=6 \end{array}\right\}$$

Este sistema no tiene solución.

Ejercicio 4.- Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).

(a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

(b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

(a) Las coordenadas de los vectores que forman el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (1,1,0) = (0,-1,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,2,1) - (1,1,0) = (-1,1,1)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial de ambos vectores.

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - k - 2i = -3i - 2j - k = (-3,-2,-1)$$

Su módulo es

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$Área = \frac{\sqrt{14}}{2} u^2$$

(b) El coseno del ángulo en el vértice A es el coseno del ángulo que existe entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

$$(0,-1,2)(-1,1,1) = \sqrt{1+4}\sqrt{1+1+1} \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1+2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,2581$$