**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD**
**ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS**
**CURSO 2018-2019**

**MATEMÁTICAS II**

**Instrucciones:**

**a) Duración: 1 hora y 30 minutos**

**b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B.**

**c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

**d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

## Opción A

**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f(x)* y la recta $y=0$.

**Ejercicio 2.- [2,5 puntos]** Determina la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f\,'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de *f* pasa por (1,0).

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x \qquad +y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{array}\right\}$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de *m*.
b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

**Ejercicio 4.- [2,5 puntos]** Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(1,-2,-1)$ $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.
**c) [1 punto]** Para $\alpha=8$ determina el valor de $\beta$ para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD**
**ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS**
**CURSO 2018-2019**

**MATEMÁTICAS II**

| | |
|---|---|
| **Instrucciones:** | **a) Duración: 1 hora y 30 minutos** |
| | **b)** Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B.** |
| | **c)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. |
| | **d)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados. |

## Opción B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+b & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}.$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

**Ejercicio 2.-** Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.

a) **[1'25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes coordenados y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1'25 puntos]** Determina a > 0 de manera que sea $\dfrac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de *f* en el intervalo [0, a] y el eje de abscisas.

**Ejercicio 3.- [2'5 puntos]** Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

**Ejercicio 4.-** Considera las rectas $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z}{2}$ y $s\equiv\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

(a) **[1'25 puntos]** Halla *k* sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) **[1'25 puntos]** Para *k = 1*, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

# SOLUCIONES

## OPCIÓN A

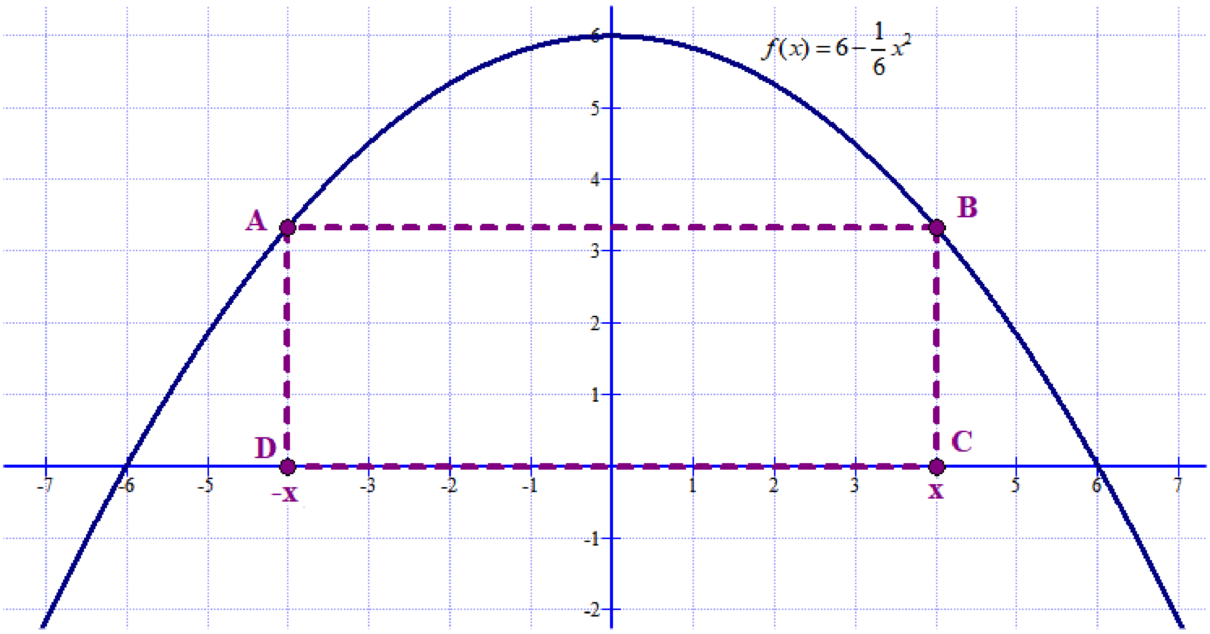
**Ejercicio 1.- [2,5 puntos]** Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima con lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f(x)* y la recta $y=0$.

Vamos a representar la función para observar como es el recinto.

Hacemos una tabla de valores para dibujar la parábola $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$.

| $x$ | $y=6-\frac{1}{6}x^2$ |
|---|---|
| $0$ | $6$ |
| $6$ | $0$ |
| $-6$ | $0$ |
| $4$ | $10/3$ |
| $2$ | $16/3$ |
| $-4$ | $10/3$ |

Su vértice está en x = 0, ya que su derivada es $f'(x)=-\frac{1}{6}2x=-\frac{1}{3}x\Rightarrow-\frac{1}{3}x=0\Rightarrow x=0$.




Los vértices del rectángulo tienen coordenadas:

$$A\left(-x,6-\frac{1}{6}x^2\right),\quad B\left(x,6-\frac{1}{6}x^2\right),\quad C(x,0),\quad D(-x,0)\ .$$

El área del rectángulo es:

$$Área(x)=Base\cdot altura=2x\cdot\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)=12x-\frac{2}{6}x^3=12x-\frac{1}{3}x^3$$

Derivamos esta función e igualamos a cero en busca del área máxima.

$$Área(x) = 12x - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow Área´(x) = 12 - x^2$$

$$Área´(x) = 0 \Rightarrow 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

Comprobemos si es un máximo sustituyendo en la segunda derivada este valor.

$$Área´(x) = 12 - x^2 \Rightarrow Área´´(x) = -2x$$

$$Área´´\left(\sqrt{12}\right) = -2\sqrt{12} < 0$$

Por lo que en $x = \sqrt{12} = 3,46$ el rectángulo alcanza área máxima.

Calculamos las dimensiones del rectángulo de área máxima:
La base es $2x = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$
La altura es la imagen de $\sqrt{12}$ que es $f(\sqrt{12}) = 6 - \frac{1}{6}\left(\sqrt{12}\right)^2 = 6 - \frac{1}{6}12 = 6 - 2 = 4$.

El rectángulo es de base $4\sqrt{3}$ y altura 4.

**Ejercicio 2.- [2,5 puntos]** Determina la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que es derivable, que su función derivada cumple $f\,'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de *f* pasa por (1,0).

Nos piden hallar la primitiva de $f\,'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ que pasa por (1,0). Es decir tal que *f(1) = 0.*

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ \text{u}=\ln x\to du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx\to v=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\end{array}\right\}=$$

$$=\ln x\cdot 2\sqrt{x}-\int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{\sqrt{x}}{x}\,dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\boxed{f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+K}$$

Como además sabemos que *f(1) = 0.*Sustituimos y determinamos el valor de K.

$$f(1)=2\sqrt{1}\ln 1-4\sqrt{1}+K=0\Rightarrow -4+K=0\Rightarrow K=4$$

La función pedida es $f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4$

**Ejercicio 3.-** Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x \quad\quad +y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{array}\right\}$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de "m".

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

a) La matriz de coeficientes asociada y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix}=1-3+2(m+2)^2-6-m-2+m+2=-8+2m^2+8+8m=2m^2+8m$$

Igualamos el determinante a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2+8m=0 \Rightarrow 2m(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-4 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a analizar por separado.

**CASO 1.** $m \neq 0 \ y \ m \neq -4$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula y su rango es 3 ( el máximo posible) al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

**CASO 2.** $m=0$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{array}\right\}$$

Se puede observar que la ecuación tercera es la suma de la primera y la segunda, por lo que este sistema es equivalente al que solo tiene la ecuación 1ª y 2ª, que pasamos a resolver.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ 2x+y=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a \text{ - } 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrcl} 2x & +y & = & z \\ -2x & -2y & = & 4z \\ \hline & -y & = & 5z \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ -y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ \boxed{y=-5z} \end{array}\right\} \Rightarrow x-5z=-2z \Rightarrow \boxed{x=3z}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

**CASO 3.** $m=-4$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ -2x+y-z=-4 \\ 3x+-2y+z=-4 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene determinante cero. El menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª es no nulo. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculamos el valor del menor que resulta de quitar la 3ª columna. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=-4-12-8-8=-32\neq 0$ . El rango de A/B es 3.

Como rango de A ≠ rango de A/B el sistema es incompatible. No tiene solución.

b) La solución para m = 0 la hemos hallado en el caso 2 del apartado a) y dicha solución es $x=3t;\ y=-5t;\ z=t$ siendo $t\in\mathbb{R}$

**Ejercicio 4.- [2,5 puntos]** Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)\ \vec{v}=(1,-2,-1)\ \vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.

c) **[1 punto]** Para $\alpha=8$ determina el valor de $\beta$ para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es ortogonal a ambos, por lo que el vector $\vec{w}$ debería tener esa misma dirección, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales al producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2i+3j-2k-2k+j+6i=4i+4j-4k$$

$$\vec{u}\times\vec{w}=(4,4,-4)$$

Como $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$ debe indicar la misma dirección sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$(4,4,-4)\,||\,(2,\alpha,\beta)\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{4}{\alpha}=\frac{-4}{\beta}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{2}=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow 4\alpha=8\Rightarrow\boxed{\alpha=2}\\ \frac{4}{2}=\frac{-4}{\beta}\Rightarrow 4\beta=-8\Rightarrow\boxed{\beta=-2}\end{cases}$$

**La solución es** $\alpha=2\ y\ \beta=-2$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar es cero →

$$\vec{w}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(2,\alpha,\beta)(1,2,3)=0\Rightarrow 2+2\alpha+3\beta=0\Rightarrow 2\alpha+3\beta=-2$$

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ su producto escalar es cero →

$$\vec{w}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2,\alpha,\beta)(1,-2,-1)=0\Rightarrow 2-2\alpha-\beta=0\Rightarrow -2\alpha-\beta=-2$$

Debemos de resolver el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\-2\alpha-\beta=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^{\text{a}} + \text{Ecuación } 1^{\text{a}}\\ \begin{array}{rrcr}2\alpha & +3\beta & = & -2\\ -2\alpha & -\beta & = & -2\\ \hline & 2\beta & = & -4\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\2\beta=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\\boxed{\beta=-2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha-6=-2\Rightarrow 2\alpha=4\Rightarrow\boxed{\alpha=2}$$

**La solución es** $\alpha=2\ y\ \beta=-2$

b) Para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección deben tener coordenadas proporcionales.

$$(1,-2,-1) \parallel (2,\alpha,\beta) \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{\beta}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \boxed{-4=\alpha} \\ \frac{2}{1}=\frac{\beta}{-1} \Rightarrow \boxed{-2=\beta} \end{cases}$$

La solución es $\alpha=-4 \ y \ \beta=-2$

c)

Si $\alpha=8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w}=(2,8,\beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2,-1)$ significa que son vectores linealmente dependientes y el determinante formado por las coordenadas de los tres vectores es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4+24-2\beta-2\beta+8+12=0 \Rightarrow -4\beta=-40 \Rightarrow \boxed{\beta=10}$$

**La solución es** $\beta=10$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si $\alpha=8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w}=(2,8,\beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2,-1)$ significa que existen números p y q tales que $\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v} \Rightarrow (2,8,\beta)=p(1,2,3)+q(1,-2,-1)$. De aquí surge un sistema, que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2=p+q \\ 8=2p-2q \\ \beta=3p-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-q=p \\ 8=2p-2q \\ \beta=3p-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8=2(2-q)-2q \\ \beta=3(2-q)-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8=4-2q-2q \\ \beta=6-3q-q \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-4q \\ \beta=6-4q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1=q \\ \beta=6-4q \end{array}\right\} \Rightarrow \beta=6-4(-1)=6+4=10 \Rightarrow \boxed{\beta=10}$$

**La solución es** $\beta=10$

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , dada por

$f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+b & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$. (ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Si la función es derivable también es continua. Debe ser continua en x = 0, por lo que:

- Existe $f(0)=sen(0)+0+b=b$
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} sen(x)+ax+b=b$
- Existe

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(0+1)}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

- Los tres valores son iguales → $\boxed{b=1}$

Con $b=1$, la función es $f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+1 & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$

Es derivable en x ≠ 0 y su derivada es

$$f\,'(x)=\begin{cases} \cos(x)+a & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{1}{x+1}x-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} \cos(x)+a & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$f\,'(x)=\begin{cases} \cos(x)+a & si \quad x<0 \\ \dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} \cos(x)+a & si \quad x<0 \\ \dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Como debe ser derivable en x = 0, la derivada por derecha e izquierda deben ser iguales.

$$f\,'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim_{x\to 0^-}(\cos(x)+a)=\cos 0+a=1+a$$

$$f\,'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f\,'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\left[\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}\right]}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-[\ln(x+1)+1]}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln(x+1)-1}{3x^2+2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{(x+1)(6x+2)}=\frac{-1}{2}$$

$$f\,'(0^-)=f\,'(0^+)\Rightarrow 1+a=\frac{-1}{2}\Rightarrow 2+2a=-1\Rightarrow 2a=-3\Rightarrow \boxed{a=\frac{-3}{2}}$$

La solución es $a=\frac{-3}{2};\quad b=1$.

**Ejercicio 2.-** Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$.
a) **[1'25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes coordenados y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
b) **[1'25 puntos]** Determina a > 0 de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de *f* en el intervalo [0, a] y el eje de abscisas.

a) **Los puntos de corte.**

$x=0\Rightarrow y=f(0)=0\cdot e^{-0^2}=0$. El punto de corte con el eje OY es (0, 0).

$y=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x\cdot e^{-x^2}=0\Rightarrow x=0, \text{ ya que la función exponencial no se anula.}$. Sale el punto ya obtenido (0, 0).
La gráfica solo tiene un punto de corte con los ejes coordenados P(0, 0).

**Los extremos relativos.**

Necesitamos la derivada de $f(x)=x\cdot e^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}$

Si igualamos a cero la derivada.

$$f'(x)=0\Rightarrow(1-2x^2)e^{-x^2}=0\Rightarrow\begin{cases}1-2x^2=0\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\\ o\\ e^{-x^2}=0,\ \text{Imposible}\end{cases}$$

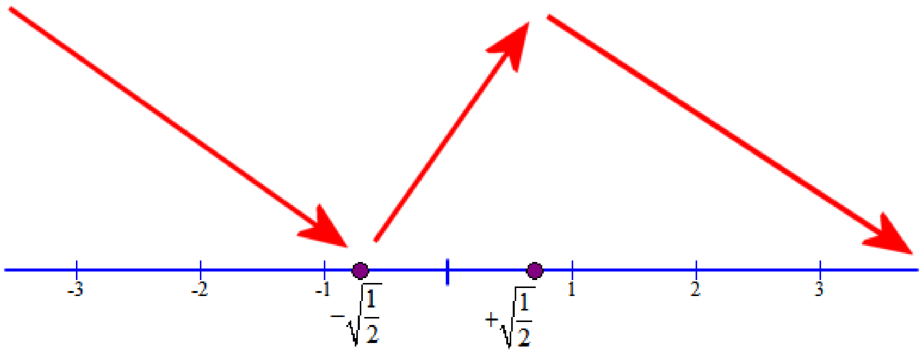
Veamos que ocurre en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ $y$ $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos $x=-1$ la derivada vale $f'(-1)=(1-2)e^{-1}=-\frac{1}{e}<0$. La función decrece.

En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos $x=0$ la derivada vale $f'(0)=(1-0)e^{0}=1>0$. La función crece.

En $\left(+\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ tomamos $x=1$ la derivada vale $f'(1)=(1-2)e^{-1}=\frac{-1}{e}<0$. La función decrece.

La función evoluciona como indica el esquema.




La función tiene un mínimo en $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}$, tomando los valores

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2e}}=-0,43$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2e}}=0,43$$

b) La función solo corta al eje OX en (0, 0), por lo que el área es la integral definida de la función entre 0 y a.

$$Área=\int_0^a x\cdot e^{-x^2}dx=\frac{1}{-2}\int_0^a(-2x)\cdot e^{-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a=\left[-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right]-\left[-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right]=-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}$$

Como queremos que el área sea igual a $\frac{1}{4}$ se nos plantea la ecuación:

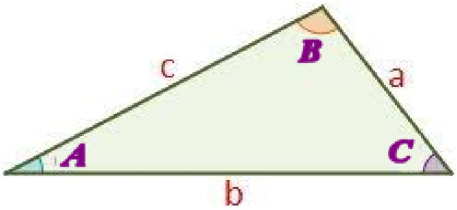
$$-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow -2e^{-a^2}+2=1\Rightarrow -2e^{-a^2}=-1\Rightarrow e^{-a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{e^{a^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{a^2}=2$$

Tomamos logaritmos

$$\ln e^{a^2}=\ln(2)\Rightarrow a^2=\ln 2\Rightarrow\boxed{a=\sqrt{\ln 2}}$$

**Ejercicio 3.- [2’5 puntos]** Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Si damos nombre a los ángulos del triángulo como aparece en la imagen:




Se cumple:

- No lo dice el enunciado, pero se sabe que la suma de los tres ángulos es 180º → $A+B+C=180$
- El menor de ellos es la mitad del ángulo mayor → $A=\frac{B}{2}$
- La suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo → $A+B=2C$

Juntando las tres condiciones surge un sistema que hay que resolver:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=180 \\ A=\frac{B}{2} \\ A+B=2C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{B}{2}+B+C=180 \\ \frac{B}{2}+B=2C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B+2B+2C=360 \\ B+2B=4C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3B+2C=360 \\ 3B-4C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llcr} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \text{ - Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 3B & -4C & = & 0 \\ -3B & -2C & = & -360 \\ \hline & -6C & = -360 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3B+2C=360 \\ -6C=-360 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 3B+2C=360 \\ \boxed{C=\frac{-360}{-6}=60} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3B-4\cdot 60=0 \Rightarrow 3B=240 \Rightarrow \boxed{B=\frac{240}{3}=80} \Rightarrow \boxed{A=\frac{80}{2}=40}$$

El triángulo de la solución tiene ángulos de 40º, 60º y 80º.

**Ejercicio 4.-** Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

(a) **[1'25 puntos]** Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) **[1'25 puntos]** Para k = 1, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

(a) Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,2,2)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1)$.

$\frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$ →No son proporcionales las coordenadas, por lo que las rectas no son paralelas.

Para que se corten debe cumplirse que el determinante de la matriz formada por las coordenadas de estos dos vectores junto con uno que va de un punto cualquiera de r a otro punto cualquiera de s es cero.

$P_r(2,k,0)\ y\ P_s(-1,1,3) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,1,3)-(2,k,0) = (-3,1-k,3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 3-6-2+2k+6+6-1+k = 3k+6$$

$$3k+6=0 \Rightarrow 3k=-6 \Rightarrow \boxed{k=\frac{-6}{3}=-2}$$

(b) Si k = 1 las rectas son:

$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

El plano que buscamos contiene a r, por lo que contiene al punto $P_r(2,1,0)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (1,2,2)$. Como además es paralelo a s también tiene como vector director el de la recta s $\overrightarrow{v_s} = (-1,1,1)$.

La ecuación del plano surge del determinante:

$$\left.\begin{array}{l} P_r(2,1,0) \in \pi \\ \overrightarrow{v_1} = (1,2,2) \\ \overrightarrow{v_2} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-4-2y+2+z+2z-y+1-2x+4=0$$

$$\pi \equiv -3y+3z+3=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y-z-1=0}$$