Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1,1,2), B:(2,2,2) y C:(−1,a,b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), (a,0),(0,b) y (a,b), donde a>0 y b >0 y además el punto (a,b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

4. Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2,1,2) y la recta r:(1,0,0)+t(−1,1,1).

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,0)\ y\ \vec{v}=(2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1.

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

a) El determinante de la matriz es

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}=k(k+2)^2-k(k+2)=k(k+2)(k+2-1)=k(k+2)(k+1)$$

Si igualamos a cero este determinante

$$|A|=0 \Rightarrow k(k+2)(k+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k+2=0 \Rightarrow k=-2 \\ k+1=0 \Rightarrow k=-1 \end{cases}$$

Hay 4 casos distintos.

CASO 1. $k\neq 0; k\neq -2 \ y \ k\neq -1$

En este caso el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $k=0$

La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y columna 1ª nos queda un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$

CASO 3. $k=-2$

La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y la columna 2ª nos queda un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$

CASO 4. $k=-1$

La matriz queda

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2. Si quitamos la fila y columna 3ª nos queda un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

b) Cuando k =1 la matriz queda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Su determinante vale

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=9-3=6\neq 0$. Existe la inversa y la calculamos con la fórmula

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}9 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1, 1, 2), B:(2, 2, 2) y C:(−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector:

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$$

Donde el símbolo “×” representa el producto vectorial.

a) Para que los puntos estén alineados los vectores que los unen deben tener la misma dirección, es decir, deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-1,a,b)-(1,1,2)=(-2,a-1,b-2)\\ \overrightarrow{AB}=(2,2,2)-(1,1,2)=(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{1}=\frac{b-2}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2}{1}=\dfrac{a-1}{1}\Rightarrow -2=a-1\Rightarrow\boxed{a=-1}\\ \dfrac{-2}{1}=\dfrac{b-2}{0}\Rightarrow 0=b-2\Rightarrow\boxed{b=2}\end{cases}$$

Para $a=-1$ y $b=2$ los puntos están alineados y la recta que definen tiene ecuación que podemos obtener a partir del vector director, por ejemplo, $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$ y un punto, por ejemplo, A(1,1,2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1,1,0)\\ \text{Pasa por A(1,1,2)}\end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2 \end{cases}$$

b) Si $\vec{u} = (a,b,c)$ y $\vec{v} = (x,y,z)$ entonces $\vec{u}-\vec{v} = (a,b,c)-(x,y,z) = (a-x, b-y, c-z)$.

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a-x & b-y & c-z \\ a-x & b-y & c-z \end{vmatrix} = 0$$, ya que hay dos filas iguales, la 2ª y la 3ª.

OTRA FORMA DE COMPROBARLO

$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$ es otro vector con módulo el producto del módulo de cada uno de los vectores que se multiplican y por el seno del ángulo que forman. Como el ángulo que forman es 0º, su seno es 0 y el producto vectorial es el vector nulo.

$$\left|(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\right| = |\vec{u}-\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot sen\left((\vec{u}-\vec{v}),(\vec{u}-\vec{v})\right) = |\vec{u}-\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|\cdot sen(0^{o}) = 0$$

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), (*a*,0), (0,) y (*a*,*b*), donde *a*>0 y *b* >0 y además el punto (*a*,*b*), está situado en la curva de ecuación:

$$y = \frac{1}{x^2} + 9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

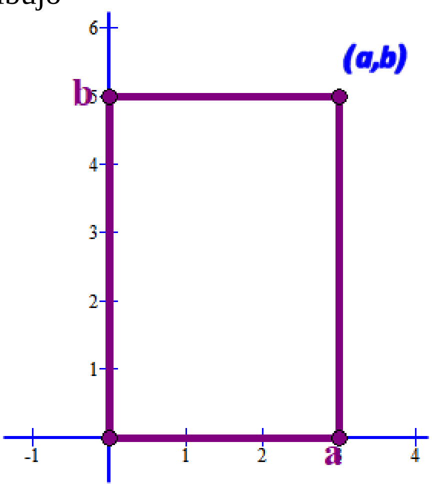
b) (*1 punto*) Determine:

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1} = 2$$

a) El triángulo es como en el dibujo



Como el punto (a, b) está en la gráfica de la función $y = \frac{1}{x^2}+9$ la coordenada b vale

$b = \frac{1}{a^2} + 9$

El área del rectángulo es $Área = a \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 9 \right) = \frac{a}{a^2} + 9a = \frac{1}{a} + 9a$

Calculamos su derivada e igualamos a cero buscando el mínimo.

$A(a) = \frac{1}{a} + 9a \Rightarrow A'(a) = -\frac{1}{a^2} + 9$

$A'(a) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + 9 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} = -9 \Rightarrow 1 = 9a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

Solo nos interesa el valor positivo. Veamos el signo antes y después de $a = \frac{1}{3}$.

Antes de $a = \frac{1}{3}$, por ejemplo $a = 0{,}1$ la derivada vale $A'(0{,}1) = -\frac{1}{0{,}1^2} + 9 = -91 < 0$ la función decrece.

Después de $a = \frac{1}{3}$, por ejemplo $a = 1$ la derivada vale $A'(1) = -\frac{1}{1^2} + 9 = 8 > 0$ la función crece.

En el punto $a = \frac{1}{3}$ hay un mínimo. El valor de $b = \frac{1}{a^2} + 9$ será $b = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 9 = 9 + 9 = 18$

El rectángulo tiene vértices:

$(0,0), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (0,18)\ y\ \left(\frac{1}{3}, 18\right)$

Y el valor del área mínima es $A\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} + 9\frac{1}{3} = 3 + 3 = 6\, u^2$

b)

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(3-x)(3+x)}\,dx =$$

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} \Rightarrow 1 = A(3+x) + B(3-x) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{3-x} + \frac{\frac{1}{6}}{3+x}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-x}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+x}\,dx =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{6}\ln(3-x) + \frac{1}{6}\ln(3+x) + C}$$

c)

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{5+k}{0}$, para que sea igual a 2 debe de producirse una indeterminación y en la resolución de la misma debe salir 2. Para que haya indeterminación debe de anularse el numerador, es decir, 5 + k = 0, luego k = –5.

Comprobémoslo.

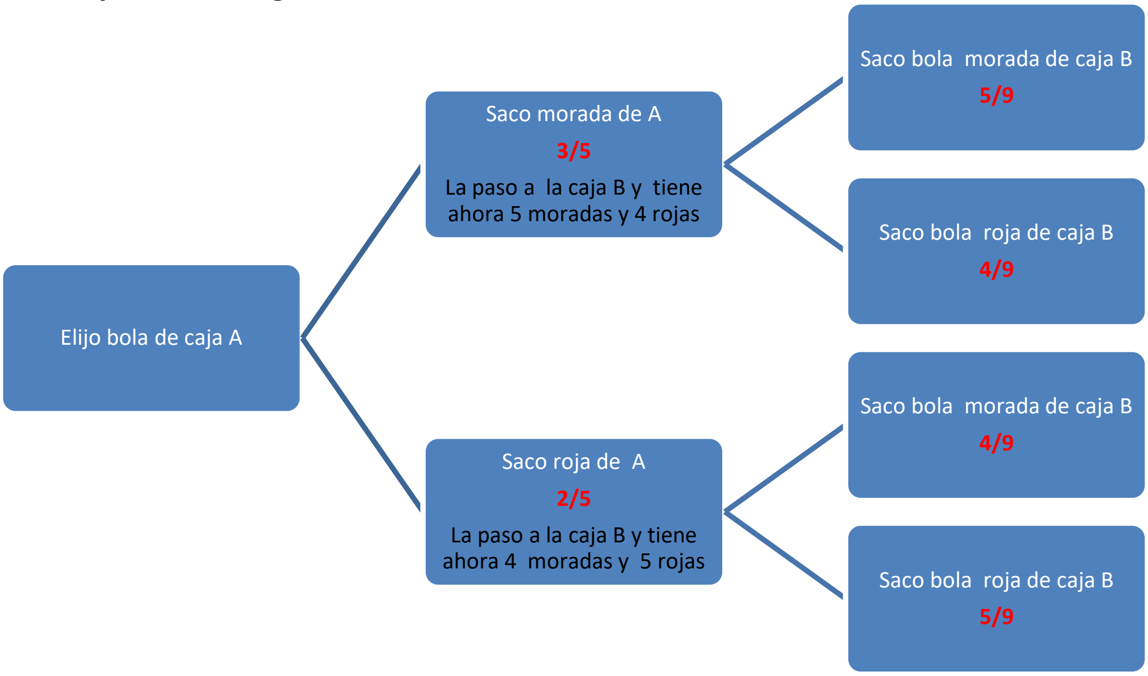
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\frac{0}{0}=\left\{\text{Indeterminación resolvemos por L´Hôpital}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1}=\frac{0}{0}=\left\{\text{Indeterminación resolvemos por L´Hôpital}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{6x-2}=\frac{8}{4}=2$$

4. Se dispone de dos cajas, la caja *A* contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja *B* contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0,75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja *A* y se pasa a la caja *B*. Posteriormente se saca una bola de la caja *B*. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja *B* sea morada?

b) (*0,75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la *A* contiene 3 moradas y 2 rojas y la *B* contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

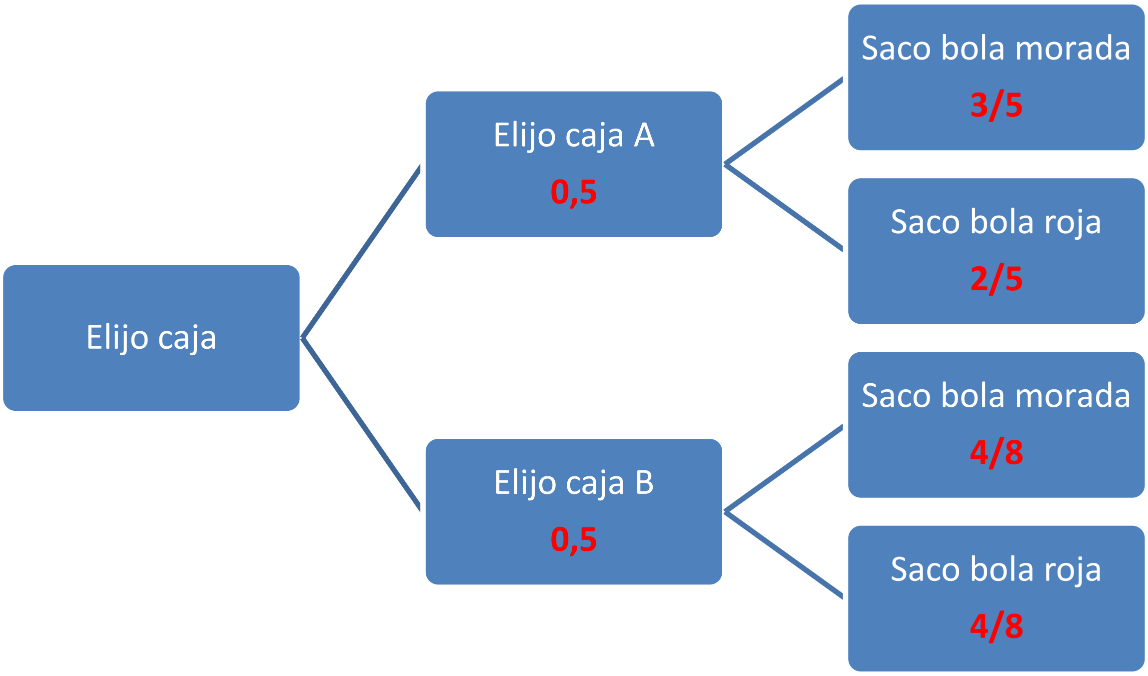
a) Construyamos un diagrama de árbol.



P(Sacar bola morada de la caja B) = P(sacar morada de A) · P(Sacar morada de B /sacar morada de A) + P(sacar roja de A) · P(Sacar morada de B /sacar roja de A) =

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}=\boxed{0{,}51}$$

b) Construyamos un nuevo diagrama de árbol para la nueva situación.



$$P(\text{La bola sea de la caja A / bola es roja}) = \frac{P(\text{La bola sea de la caja A} \cap \text{bola es roja})}{P(\text{Bola es roja})} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot \frac{2}{5}}{0,5 \cdot \frac{2}{5} + 0,5 \cdot \frac{4}{8}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} = \boxed{0,44}$$

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

a) x = deportistas de esquí alpino, y = deportistas de esquí nórdico, z = deportistas de escalada.

Hay 60 deportistas en el club → $x+y+z=60$

Hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada → $y+z=x+16$.

El número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico → $x+z=3y$.

Resolvamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ y+z=x+16 \\ x+\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ -x+y+z=16 \\ x-3y+\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=1+1+3-1+1+3=8$$

Por Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{60-48-16+180}{8}=\frac{176}{8}=22$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ -1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{16+60-16+60}{8}=\frac{120}{8}=15$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ -1 & 1 & 16 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{8}=\frac{16+180-60+48}{8}=\frac{184}{8}=23$$

Hay 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada.

b)

$$\begin{vmatrix} -2 & -2+b & -2-c \\ -4 & -6+2b & -8-2c \\ -6 & -12+3b & -20-3c \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{ccc} \text{Fila 2}^{a} \text{ - 2} \cdot \text{Fila 1}^{a} & & \\ -4 & -6+2b & -8-2c \\ 4 & 4-2b & 4+2c \\ \hline 0 & -2 & -4 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{ccc} \text{Fila 3}^{a} \text{ - 3} \cdot \text{Fila 1}^{a} & & \\ -6 & -12+3b & -20-3c \\ 6 & 6-3b & 6+3c \\ \hline 0 & -6 & -14 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -2+b & -2-c \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & -c \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -14 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -2(-2)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -2(-2)(-2)(7-6) = \boxed{-8}$$

2.

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2,1,2) y la recta r:(1,0,0)+t(−1,1,1).

b) (*0,5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$ *y* $\vec{v} = (2,1,-3)$, determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

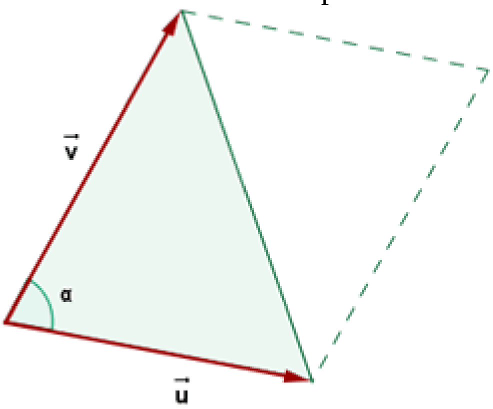
a) Tenemos que hallar la ecuación del plano que pasa por P y con vectores directores el de la recta $\vec{u} = (-1,1,1)$ y el que va de un punto de la recta Q(1,0,0) a P(2,1,2).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{QP} = (2,1,2)-(1,0,0) = (1,1,2) \\ \text{Pasa por } P(2,1,2) \end{array}\right\} \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x-4+y-1-z+2-z+2+2y-2-x+2=0$$

$$\boxed{\pi \equiv x+3y-2z-1=0}$$

b) El área de este triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de ambos vectores.



$$\vec{u}\times\vec{v} = (1,2,0)\times(2,1,-3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6i+k-4k+3j = -6i+3j-3k = (-6,3,-3)$$

$$\acute{A}rea = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{2} = \frac{|(-6,3,-3)|}{2} = \frac{\sqrt{36+9+9}}{2} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \boxed{3,74\,u^2}$$

3. Considere la función:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

a) Asíntota vertical. x = a
x = –1. Pues el dominio de la función es R–{–1}

Asíntota horizontal. y = b

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota es y = 0

Asíntota oblicua. y = mx + n
No hay, pues hay horizontal.

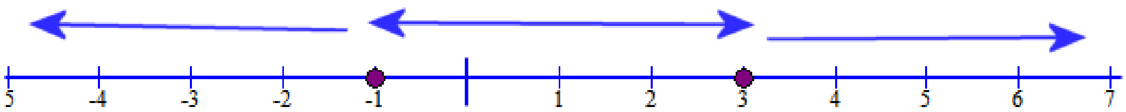
b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero, obtendremos los puntos críticos de la función y de ahí obtenemos la información pedida.

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{\cancel{(x+1)}\left[(x+1)-(x-1)2\right]}{\cancel{(x+1)}(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3}=\frac{-x+3}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x+3}{(x+1)^3}=0\Rightarrow x=3$$

Veamos que ocurre en las tres zonas en que se divide la recta real al marcar x = –1 y x = 3.



En $(-\infty,-1)$ tomamos x = –2 y la derivada vale $f'(-2)=\frac{2+3}{(-2+1)^3}=-1<0$ La función decrece.

En $(-1,3)$ tomamos x = 0 y la derivada vale $f'(0)=\frac{0+3}{(0+1)^3}=3>0$ La función crece.

En $(3,+\infty)$ tomamos x = 4 y la derivada vale $f'(4)=\frac{-4+3}{(4+1)^3}=\frac{-1}{125}<0$ La función decrece.

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y crece en $(-1,3)$.

c)

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x-2}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2-4}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x+2}{(x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{-4}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2\right]_1^3 - \frac{4}{2}\int_1^3 (x+1)^{-2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2\right]_1^3 + \left[2(x+1)^{-1}\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1}\right]_1^3 = \left[\frac{1}{2}\ln(3+1)^2 + \frac{2}{3+1}\right] - \left[\frac{1}{2}\ln(1+1)^2 + \frac{2}{1+1}\right] =$$

$$= \ln 4 + \frac{1}{2} - \ln 2 - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \boxed{0,1931}$$

4. La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0,5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

X = Número de mensajes sin faltas de ortografía. Se trata de una binomial de parámetros p = 0,75 y n = 20. X = B(20, 0.75).

a)

$$P(X=10) = \binom{20}{10} 0,75^{10} \cdot 0,25^{10} = \frac{\cancel{20}\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11}{\cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cancel{3}\cdot \cancel{2}} 0,75^{10} \cdot 0,25^{10} =$$

$$= 184756 \cdot 0,75^{10} \cdot 0,25^{10} = \boxed{0,0099}$$

b)

$$P(X=20) = \binom{20}{20} 0,75^{20} \cdot 0,25^{0} = 0,75^{10} = \boxed{0,0032}$$

$$P(18 \text{ mensajes o más con faltas de ortografía}) = P(2 \text{ o menos sin faltas de ortografía}) =$$

$$= P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

c)

$$= \binom{20}{0} \cdot 0,75^{0} \cdot 0,25^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,75^{1} \cdot 0,25^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0,75^{2} \cdot 0,25^{18} =$$

$$= 0,25^{20} + 20 \cdot 0,75 \cdot 0,25^{19} + \frac{20\cdot 19}{2} \cdot 0,75^{2} \cdot 0,25^{18} = \boxed{0,00000000161}$$

Prácticamente imposible.