Model 2. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació que diu que el determinant de la matriu del sistema és zero: 2 punts.
Discussió correcta per a $m \neq \pm 3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = -3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = 3$: 1 punt.

b) Resolució per a quan el sistema és compatible indeterminat: 3 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2.
- Càlcul correcte de $f'(x)$: 1 punt.
- Càlcul correcte dels zeros de $f'(x) = 0$: 1 punt.
- Càlcul correcte dels màxims i mínims: 1 punt.
- Càlcul correcte dels intervals de creixement: 1.5 punts.
- Càlcul correcte dels intervals de decreixement: 1.5 punts.
- Esbós de la funció: 4 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

3.
- Càlcul correcte dels vectors directors del pla demanat: 6 punts (3 punts per cada vector director).
- Càlcul correcte de l'equació del pla: 4 punts.

4. *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) Plantejar bé la probabilitat demanada: 1 punt,
ii) Estandarditzar la variable X: 1 punt,
iii) Càlcul correcte de la probabilitat: 2 punts.

b) Puntuació de l'apartat b):

Model 2. Criteris específics de correcció

i) Plantejar bé la condició que ha de satisfer p: 1 punt,
ii) Estandarditzar la variable X: 2 punts,
iii) Càlcul correcte del valor de p: 3 punts.

OPCIÓ B

1. - Càlcul correcte de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$: 4 punts.
- Plantejament correcte del sistema a resoldre per x i y: 3 punts.
- Resolució correcta del sistema: 3 punts (1 punt per incògnita).

2. *a*) Esbós de la funció: 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

b) Càlcul correcte de l'àrea demanada: 4 punts.

i) Plantejar correctament la integral: 0.5 punts.
ii) Dividir correctament la integral en dues: 1 punt.
iii) Càlcul correcte de cada integral: 2 punts (1 punt per cada integral).
iv) Càlcul correcte de la integral total: 0.5 punts.

3. - Càlcul correcte dels vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$ (o qualsevol altra parella de vectors que permeti calcular l'àrea del triangle): 2 punts.
- Càlcul correcte de l'àrea del triangle ABC: 3 punts.
- Donar correctament la definició de $\cos\alpha$, on α és l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$: 3 punts.
- Càlcul correcte de l'angle i donar el seu valor en radians o en graus: 2 punts.

4. a) – Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.
– Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1.5 punts.

b) – Traducció correcta de les dades a la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.
– Càlcul correcte de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.

c) – Càlcul correcte de les probabilitats demanades: 3 punts (1 punt per cada probabilitat).
– Comprovació correcta que els esdeveniments no són independents: 1 punt.

Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és la següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val: $18 - 2m^2$.
El determinant serà nul per a $m = \pm 3$.
Si $m \neq \pm 3$, el rang de la matriu del sistema serà 3 i el rang de la matriu ampliada també serà 3, ja que només hi ha tres equacions. Per tant, en aquest cas, es tractaria d'un sistema compatible determinat.
Si $m = -3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & -3, \\ 6x & + & 6y & + & 9z = & -9. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 90 \neq 0.$$

Model 2. Solucions

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.
Si $m = 3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & 3, \\ 6x & + & 6y & + & 9z = & -9. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes és nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

b) La solució del sistema per a $m = 3$ serà:

$$y = \frac{6}{5} - \frac{8}{5}x = 1.2 - 1.6x, \quad z = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}x = -1.8 + 0.4x,$$

amb x lliure.

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

Solució. Per calcular els màxims i mínims, hem de calcular primer els zeros de la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0, \ \Rightarrow x = \pm 1.$$

A continuació miram si són màxims o mínims:

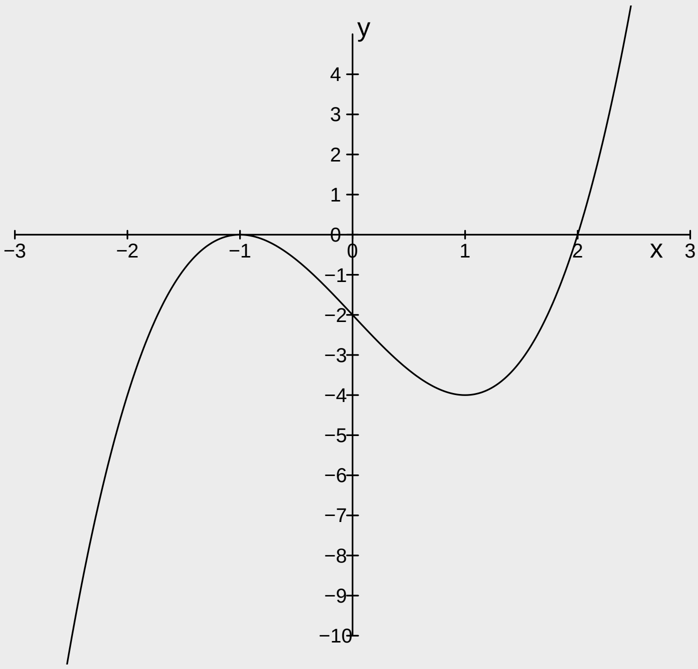
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Aleshores el punt $(-1, 0)$ és un màxim relatiu, i el punt $(1, -4)$, un mínim relatiu.

Els intervals de creixement seran: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, i els de decreixement, $(-1, 1)$.

L'esbós de la funció és el següent:

Model 2. Solucions



3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1, \\ y+z &= 2, \end{aligned}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1,1,0)$ i $(0,1,1)$. (10 punts)

Solució. Els vectors directors del pla seran, per una part, el vector director de la recta $x+y=1, y+z=2$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k = (1,-1,1),$$

i, per una altra part, l'altre vector serà:

$$(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1).$$

L'equació del pla serà:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x + 2y + z = 0.$$

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

Model 2. Solucions

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Solució. *a*) Sigui X la variable aleatòria que ens dona el pes d'un individu escollit a l'atzar de la comunitat. Ens demanen la probabilitat següent:

$$p(X > 100) = p\left(Z > \frac{100-85}{15}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587,$$

on Z és una normal estàndard ($Z = N(0,1)$).
Per tant, el 15.87% dels individus de la comunitat tenen sobrepès.

b) Sigui p el pes màxim d'un individu del col·lectiu. Sabem:

$$p(X < p) = 0.4, \Rightarrow p\left(Z < \frac{p-85}{15}\right) = 0.4.$$

El valor 0.4 no surt a les taules, això és degut al fet que el valor $\frac{p-85}{15}$ és negatiu. Per tant, fent servir la simetria de la normal, podem escriure:

$$p\left(Z < -\frac{p-85}{15}\right) = 0.6.$$

Mirant a les taules,

$$-\frac{(p-85)}{15} = \frac{0.25+0.26}{2} = 0.255, \Rightarrow p = 85 - 0.255 \cdot 15 = 81.175 \text{ kg}.$$

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solució. Calculam $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2+2x+y \\ -2+x+2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

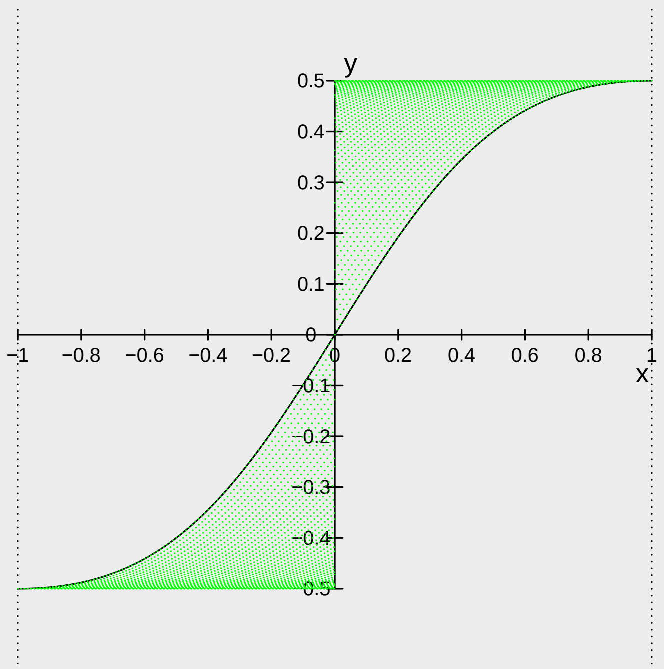
$$\left.\begin{aligned} -2+2x+y &= z, \\ -2+x+2y &= z, \\ x &= z. \end{aligned}\right\}$$

La solució al sistema anterior és: $x = y = z = 1$.

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció juntament amb la regió demanada és el següent:

Model 2. Solucions



b) L'àrea de la regió demanada serà:

$$A = \left| \int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx \right| + \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \right]_{-1}^{0} \right| + \left[\frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \right]_{0}^{1} = 2\left(\frac{1}{2} \ln 2 \right) = \ln 2 \approx 0.6931.$$

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

Solució. Calculem primer els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$:

$$\mathbf{AB} = (1,1,0) - (0,0,0) = (1,1,0),$$
$$\mathbf{AC} = (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1).$$

L'àrea del triangle serà $\frac{1}{2}|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}|$:

$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}|i - j + k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Model 2. Solucions

L'angle α entre els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$ satisfà:

$$\cos\alpha = \frac{(1,1,0)\cdot(0,1,1)}{|(1,1,0)|\cdot|(0,1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

L'angle α serà: $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, que correspon a 60 graus.

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Solució. Primer posam a la taula següent les probabilitats donades:

Por de volar/Nivell d'estrès	Baix	Mitjà	Alt	Total
Si			0.05	
No		0.05		0.6
	0.5	0.25		1

A continuació, omplim els forats:

Por de volar/Nivell d'estrès	Baix	Mitjà	Alt	Total
Si	**0.15**	**0.20**	0.05	**0.4**
No	**0.35**	0.05	**0.2**	0.6
	0.5	0.25	**0.25**	1

Ens demanen:

a) $p(\text{Estrés mitjà} \ \cap\ \text{Por de volar}) = 0.20$.
b) $p(\text{Estrés baix} \mid \text{Por de volar}) = \frac{p(\text{Estrés baix} \cap \text{Por de volar})}{p(\text{Por de volar})} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$.
c) les probabilitats dels esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar" són les següents:

$$p(\text{Estrés baix}) = 0.5, \quad p(\text{Por de volar}) = 0.4.$$

La probabilitat de l'esdeveniment intersecció val:

$$p(\text{Estrés baix} \ \cap\ \text{Por de volar}) = 0.15.$$

Com que $0.15 \neq 0.5\cdot 0.4$, els esdeveniments no són independents.

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.