OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.- Consideremos la igualdad matricial **A . M = B** donde

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2t & 2\\ -1 & t & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

1) [0,25 puntos] ¿Cuantas fila y columnas debe de tener la matriz **M**?
2) [1’5 puntos] Para qué valores de ***t*** es la matriz de ***A*** invertible?.
3) [1’5 puntos] En el caso **t = -1**, despeje la matriz **M** en función de las matrices **A** y **B** y calcule su valor

1) Como la matriz **A** tiene 3 filas y 3 columnas, es de orden 3 x 3 y la matriz **B** tiene 3 filas y 2 columnas, es de orden 3 x 2 (3 x 3 - 3 x 2 = 3 x 2), la matriz **M** tiene que ser de orden 3 x 2 (quedan la primera y la ultima de los cuatro ordenes enfrentados)

2) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2t & 2\\ -1 & t & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2t & 2\\ 0 & 3t & 3\\ 0 & 1+2t & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3t & 3\\ 1+2t & 3\end{vmatrix}=9t-3\cdot(1+2t)=9t-3-6t=3t-3=3\,(t-1)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow 3\,(t-1)=0\Rightarrow t-1=0\Rightarrow t=1$$

$$\forall t\in\Re-\{1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

3)

$$AM=B\Rightarrow A^{-1}AM=A^{-1}B\Rightarrow IM=A^{-1}B\Rightarrow M=A^{-1}B$$

$$Cuando\ t=-1\Rightarrow |A|=-1-1=-2\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ A^t=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 10\\ 6 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -3 & \frac{3}{2}\\ -2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Sea la función: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1) [2,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de **f** . Compruebe la solución obtenida
2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por **f** y el eje **y = 0** y la rectas **x = 0 y x = 1**

$$F(x)=\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int\frac{t^2-1}{t}\,2t\,dt=2\int\left(t^2-1\right)dt=2\cdot\frac{1}{3}\cdot t^3-2t=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}+K$$

$$1+x=t^2\Rightarrow\begin{cases}dx=2t\,dt\\ x=t^2-1\end{cases}$$

$$F(x)=\frac{2}{3}\cdot(1+x)\cdot\sqrt{1+x}-2\sqrt{1+x}+K=2\sqrt{1+x}\left(\frac{1+x}{3}-1\right)+K=2\sqrt{1+x}\left(\frac{1+x-3}{3}\right)+K$$

$$F(x)=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x}+K$$

Comprobación

$$f(x)=F'(x)=\frac{2}{3}\cdot\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}(x-2)\right]=\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{2\cdot(1+x)+x-2}{2\sqrt{1+x}}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2+2x+x-2}{\sqrt{1+x}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{\sqrt{1+x}}$$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow Comprobado$$

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow 0=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow x=0$$

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0\Rightarrow Psositivo$$

$$A=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x}\right]_0^1=\left[\frac{2}{3}(1-2)\sqrt{1+1}\right]-\left[\frac{2}{3}(0-2)\sqrt{1+0}\right]=-\frac{2}{3}\sqrt{2}-\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$A=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}\,u^2$$

Ejercicio 3

Sea el punto **P(0 , 2 , 2)**. Sea ***r*** la recta expresada en forma continua $r:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$

1) [0,75 PUNTOS] Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta **r**
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de **P** a **r**
3) [**1 PUNTO]** Calcule un plano perpendicular a **r** que pase por el punto **P**

1)

$$r:\begin{cases} x=2+4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$$

2) Hallaremos un plano π que conteniendo a **P**, sea perpendicular a **r (que es la solución del apartado c))**, el vector director del plano es el de la recta **r** que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación del plano buscado. Posteriormente se halla el punto **Q** intersección de la recta **r** y el plano π. El módulo del vector **PQ** es la distancia entre el punto **P** y la recta **r** pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(4\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(0\,,2\,,2)=(x\,,\,y-2\,,\,z-2) \end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{PG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG}=0\Rightarrow$$

$$(4\,,1\,,2)\cdot(x\,,\,y-2\,,\,z-2)=0\Rightarrow 4x+(y-2)+2\cdot(z-2)=0\Rightarrow \pi:4x+y+2z-6=0$$

$$Punto\ de\ \text{int}er\text{sec}ción\ de\ \pi\ y\ la\ recta\ r$$

$$4\cdot(2+4\lambda)+\lambda+2\cdot(-1+2\lambda)-6=0\Rightarrow 8+16\lambda+\lambda-2+4\lambda-6=0\Rightarrow 21\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow$$

$$Q\begin{cases} x=2+4\cdot 0 \\ y=\lambda \\ z=-1+2\cdot 0 \end{cases}\Rightarrow Q(2\,,0\,,-1)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(2\,,0\,,-1)-(0\,,2\,,2)=(2\,,-2\,,-3)\Rightarrow$$

$$d(P\,,r)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}\ u$$

3) Ya hemos resuelto el problema en el apartado 2) $\pi:4x+y+2z-6=0$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) **[1 PUNTO]** Determine los valores de **a** para que el sistema sea compatible
2) **[2,25 PUNTOS]** Calcule todas soluciones en caso de que sea compatible indeterminado

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = a \cdot (a-1) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow a \cdot (a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a = 0$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema.\ Incompatible$$

$$Si\ a = 1$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas$$

$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

2)

$$Si\ a = 1 \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow -y - z = -5 \Rightarrow y = 5 - z \Rightarrow x + 5 - z + z = 2 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (-3\,,\,5 - \lambda\,,\,\lambda)$$

Ejercicio 2.- Tenemos la función definida a trozos $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & si \quad x<0 \\ 2x^3-15x^2+36x+3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función **g** en $\Re-\{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.
2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en **x = 0**.
3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de **x = 0**

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2} & si \quad x<0 \\ 6x^2-30x+36 & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow 6x^2-30x+36=0 \Rightarrow 6\cdot\left(x^2-5x+6\right)=0 \Rightarrow$$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1\geq 0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & si \quad x<0 \\ 6\cdot(x-3)\cdot(x-2) & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow Creciente \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x+1)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases} \\ \begin{cases} 6>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x-3>0 \Rightarrow x>3 \end{cases} \end{cases}$$

	$-\infty$ **0**
1 > 0	**(+)**
$(x+1)^2$> 0	**(-)**
Solución	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re / x<0$

	0	**2**	**3** ∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re/(0<x<2)\cup(x>2)$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/2<x<3$

Máximo relativo en $x=2 \Rightarrow f(2)=2\cdot 2^3-15\cdot 2^2+36\cdot 2+3=16-60+72+3=31$ de creciente pasa a decreciente

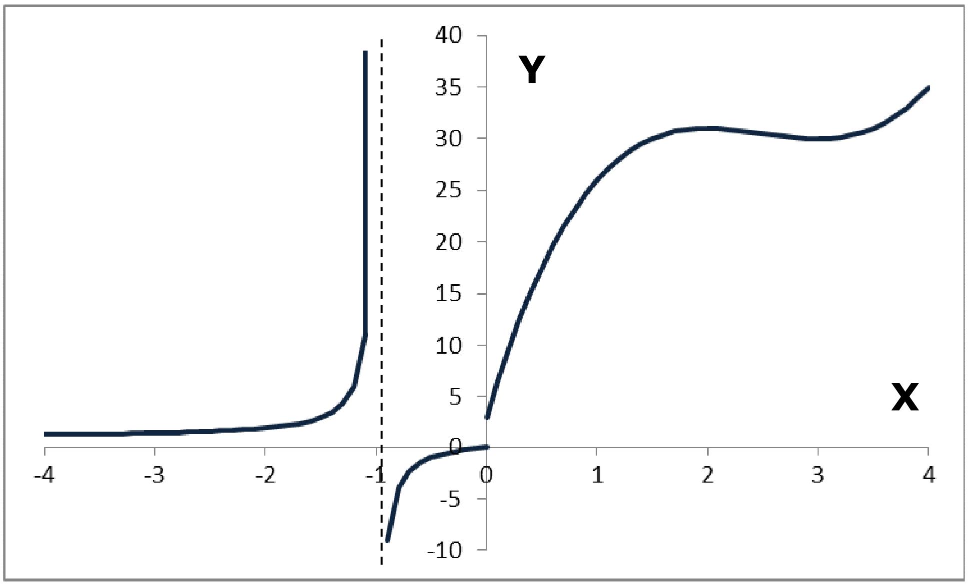
Mínimo relativo en $x=3 \Rightarrow f(3)=2\cdot 3^3-15\cdot 3^2+36\cdot 3+3=54-135+108+3=30$ de decreciente pasa a creciente
2)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\dfrac{0}{0+1}=\dfrac{0}{1}=0 \\ g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=2\cdot 0^3-15\cdot 0^2+36\cdot 0+3=3 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=3\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)=0$$

La función no es continua en x = 0

Continuación Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2

3)



3) Sean **A = (-2 , 1 , 0)**, **B = (1 , 1 , 1)**, **C = (2 , 0 , 2)** son tres puntos de $\Re^3$

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por **A**, **B** y **C**

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$

3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por **ABC**

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{(3\,,0\,,1)}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{(4\,,-1\,,2)}$ son ortogonales

1) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y el tetraedro (que se calcula por el producto mixto de los tres vectores) que forman es de volumen nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\,,1\,,1) - (-2\,,1\,,0) = (3\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2\,,0\,,2) - (-2\,,1\,,0) = (4\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (-2\,,1\,,0) = (x+2\,,y-1\,,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4\,(y-1) - 3\,z + (x+2) - 6\,(y-1) = 0 \Rightarrow (x+2) - 2(y-1) - 3\,z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0$$

2) La recta **r** queda definido por el vector **BC** que es su director y por uno cualquiera de los puntos (tomaremos el punto **B**)

$$\overrightarrow{BC} = (2\,,0\,,2) - (1\,,1\,,1) = (1\,,-1\,,1) \Rightarrow r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = z - 1$$

3) El área del triángulo **ABC**, es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3\,,\,0\;\,,1) \\ \overrightarrow{AC} = (4\,,-1\;\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{j} - 3\vec{k} + \vec{i} - 6\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{\sqrt{14}}{2}\, u^2$$

4) Si los vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{(3\,,0\,,1)} \cdot \overrightarrow{(4\,,-1\,,2)} = 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 12 + 0 + 2 = 14 \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \not\perp \vec{v}$$

No son ortogonales