

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean M la matriz
$$\begin{pmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{pmatrix}$$

1) [2,25 PUNTOS] Calcule el rango de M en función del valor de x .

2) [1 PUNTO] Calcule la inversa de M en el caso de $x = -1$

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -x & x \\ 1 & -x & x \\ x & 2x & x \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -x & x \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = x^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-x & x-1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot x^2 \cdot (x-1)$$

$$\text{Si } |M| = 0 \Rightarrow -3 \cdot x^2 \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathfrak{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(M) = 3$$

Si $x = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(M) = 1$$

Si $x = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(M) = 2$$

b)

Si $m = -1$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(-6) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } M^{-1} \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \text{adj } M^t \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } M^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

1) [2,5 PUNTOS] Calcular el rectángulo de base x cm., altura y cm. y diagonal $3\sqrt{2}$ cm. cuyo perímetro sea máximo

2) [1 PUNTO] Calcule la recta tangente a la función $h(x) = x^2 + x$ en el punto (1, 2)

1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18 - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{18 - x^2} \Rightarrow P = 2 \cdot (x + \sqrt{18 - x^2}) \Rightarrow \\ P = 2x + 2y = 2(x + y) \end{cases}$$

$$P' = \frac{dP}{dx} = 2 \cdot \left(1 + \frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{18 - x^2} - x}{\sqrt{18 - x^2}} \right) \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{18 - x^2} - x}{\sqrt{18 - x^2}} \right) \Rightarrow \sqrt{18 - x^2} - x = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{18 - x^2} = x \Rightarrow 18 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

$$P'' = \frac{dP'}{dx} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{18 - x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{18 - x^2}} \cdot x}{18 - x^2} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{18 - x^2 + x^2}{\sqrt{18 - x^2} \cdot (18 - x^2)} \right) = \frac{-36}{(18 - x^2)\sqrt{18 - x^2}}$$

$$P''(3) = \frac{-36}{(18 - 3^2)\sqrt{18 - 3^2}} = \frac{-36}{9 \cdot 3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ cm} \\ y = \sqrt{18 - 3^2} = 3 \text{ cm} \end{cases}$$

2)

$$h'(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} h(1) = 2 \\ h'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 1 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

Ejercicio 3

Sean $P: x + 3y + 2z - 1 = 0$ y $Q: 2x + 6y + 4z + 3 = 0$ dos planos

1) [0,25 PUNTOS] Extraiga el vector normal al plano P de su ecuación general (implícita).

2) [1 PUNTO] Calcule ecuaciones paramétricas del plano P .

3) [1 PUNTO] Determine la posición relativa de los planos P y Q .

4) [1 PUNTO] Calcule la recta normal a Q que pase por $(0, 0, 0)$

1)

$$\vec{v}_P = (1, 3, 2)$$

2)

$$x = 1 - 3y - 2z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3\lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

3) Los planos pueden ser paralelos o cortarse en una recta a la que definen. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cortarán

$$\begin{cases} \vec{v}_P = (1, 3, 2) \\ \vec{v}_Q = (2, 6, 4) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} \Rightarrow \text{Son planos paralelos}$$

4) La recta s tiene como vector director la del plano Q

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_Q = (2, 6, 4) \equiv (1, 3, 2) \Rightarrow s \equiv x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2**Ejercicio 1**

Considere el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro t :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2tx + y + (t+1)z = 1 \\ (t-1)x + ty + tz = -2 \end{cases}$$

1) [0,25 PUNTOS] Escriba el sistema de ecuaciones como un sistema matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

2) [3 PUNTOS] Clasifique el sistema en función del valor del parámetro t , calculando todas sus soluciones en los que sea compatible.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t & 1 & t+1 \\ t-1 & t & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2t-1 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2t-1 & t \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -t \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$\forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$
Si $t = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Cuando $t = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z \Rightarrow x + (1 - z) + z = 3 \Rightarrow x + 1 - z + z = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$

Solución $\Rightarrow (x, y, z) = (2, 1 - \lambda, \lambda)$

Cuando $t \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t+1 \\ -2 & t & t \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & t \\ -2-3t & 0 & 0 \end{vmatrix}}{t} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & t \\ -2-3t & 0 \end{vmatrix}}{t} = \frac{(-1) \cdot t \cdot (-2-3t)}{t} = 2 + 3t$$

Continuación del problema 1 de la Opción de Examen nº 22) *Continuación*

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2t & 2 & t+1 \\ t-1 & -1 & t \end{vmatrix}}{t} = \frac{\begin{vmatrix} 3t-2 & 0 & 1+3t \\ 4t-2 & 0 & 3t+1 \\ t-1 & -1 & t \end{vmatrix}}{t} = \frac{-(-1) \begin{vmatrix} 3t-2 & 1+3t \\ t-1 & t \end{vmatrix}}{t} = \frac{t(3t-2) - (t-1) \cdot (1+3t)}{t}$$

$$y = \frac{3t^2 - 2t - (t + 3t^2 - 1 + 3t)}{t} = \frac{3t^2 - 2t - 3t^2 + 1 - 4t}{t} = \frac{1 - 6t}{t}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2t & 1 & 1 \\ t-1 & t & -2 \end{vmatrix}}{t} = \frac{\begin{vmatrix} 1-2t & 0 & 2 \\ 2t & 1 & 1 \\ t-1-2t^2 & 0 & -2-t \end{vmatrix}}{t} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 1-2t & 2 \\ -(2t^2-t+1) & -(2+t) \end{vmatrix}}{t} = \frac{(2t-1) \cdot (2+t) + 2(2t^2-t+1)}{t}$$

$$z = \frac{4t - 2 + 2t^2 - t + 4t^2 + t - 1}{t} = \frac{6t^2 + 4t - 3}{t}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(2 + 3t, \frac{1 - 6t}{t}, \frac{6t^2 + 4t - 3}{t} \right)$$

Ejercicio 2

Sea f la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x^2 - 3 & \text{si } 3 < x < 5 \\ be^x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule los valores de a y b para que la función sea continua en toda \mathfrak{R}

2) [1 PUNTO] Si $a = 1$ y $b = 3$, calcule el área encerrada bajo la gráfica de f comprendido entre las rectas $x = -1$ y $x = 3$

3) [1 PUNTO] Calcule los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 + x + 3$

1)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = a \cdot 3^2 + 3 + 3 = 6 + 9a \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15 \end{array} \right. \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow 6 + 9a = 15 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 2 \cdot 5^2 - 3 = 47 \\ f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = b \cdot e^5 \end{array} \right. \Rightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \Rightarrow b \cdot e^5 = 47 \Rightarrow b = \frac{47}{e^5}$$

Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 2

2)

$$f(x) = x^2 + x + 3 \quad \text{si } x \leq 3$$

Puntos de corte con OX $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow$ No hay puntos

$$x = 1 \in (-1, 3) \Rightarrow f(1) = 1^2 + 1 + 3 = 5 > 0$$

$$A = \int_{-1}^3 (x^2 + x + 3) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^3 + \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^3 + 3 \cdot [x]_{-1}^3 = \frac{1}{3} \cdot [3^3 - (-1)^3] + \frac{1}{2} \cdot [3^2 - (-1)^2] + 3 \cdot [3 - (-1)]$$

$$A = \int_{-1}^3 (x^2 + x + 3) dx = \frac{1}{3} \cdot [27 - (-1)] + \frac{1}{2} \cdot (9 - 1) + 3 \cdot 4 = \frac{28}{3} + 4 + 12 = \frac{28 + 12 + 36}{3} = \frac{76}{3} u^2$$

3)

$$f(x) = x^2 + x + 3.$$

Los extremos relativos verifican $f'(x) = 0$.

$$\text{De } f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \text{ posible extremo relativo.}$$

Como $f''(x) = 2$ y $f''(-1/2) = 2 > 0$, $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo. (El vértice de la parábola)

Ejercicio 3.-

Sea Q el plano de ecuación vectorial $\mathbf{Q}: (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) + s \overrightarrow{(2, 1, 0)} + t \overrightarrow{(2, -1, 1)}$

- 1) [0,5 PUNTOS] Calcule la ecuación implícita (general) del plano Q
 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la recta que pasa por $(-1, 2, 4)$ que sea perpendicular al plano Q
 3) [1,25 PUNTOS] Calcule la distancia del punto $(-1, 2, 4)$ al plano Q

1)

$$Q \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 \cdot (z-1) - 2 \cdot (z-1) - 2y = 0 \Rightarrow Q \equiv x - 2y - 4z + 4 = 0$$

2) La recta r tiene como vector director el del plano, con el punto Q queda definida

$$\vec{v}_r = \vec{v}_Q = (1, -2, -4) \Rightarrow r \equiv x+1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{-4}$$

3) Hallaremos el punto de intersección P entre el plano Q y la recta r perpendicular a él (hallada en el apartado anterior). El módulo del vector PQ es la distancia pedida

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 4 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow (-1 + \lambda) - 2 \cdot (2 - 2\lambda) - 4 \cdot (4 - 4\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow -1 + \lambda - 4 + 4\lambda - 16 + 16\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$21\lambda - 17 = 0 \Rightarrow 21\lambda = 17 \Rightarrow \lambda = \frac{17}{21} \Rightarrow P \begin{cases} x = -1 + \frac{17}{21} \\ y = 2 - 2 \cdot \frac{17}{21} \\ z = 4 - 4 \cdot \frac{17}{21} \end{cases} \Rightarrow P \left(-\frac{4}{21}, \frac{8}{21}, \frac{16}{21} \right) \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left[-1 - \left(-\frac{4}{21} \right) \right]^2 + \left[2 - \left(\frac{8}{21} \right) \right]^2 + \left[4 - \left(\frac{16}{21} \right) \right]^2} = \sqrt{\left(-\frac{17}{21} \right)^2 + \left(\frac{34}{21} \right)^2 + \left(\frac{68}{21} \right)^2}$$

$$d(r, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{289 + 1156 + 4624}}{21} = \frac{\sqrt{6069}}{21} u$$