OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.- Sean *x* , *y* , *z* números reales. Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas ***x*, *y*, *z*** que resuelvan el problema matricial *AB* = *C* y calcule todas sus soluciones.
2) [1,25 PUNTOS] Si ***x* = 0, *y* = 0**, calcule para qué valores de ***z*** la matriz ***A*** tiene rango 2.

$a)$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2z-2+x \\ 2+y-z \\ 2(x+z)+y-z \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+2z-2=-2 \\ y-z+2=3 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$$

$b)$

$$|A|=\begin{vmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -z \\ z & z \end{vmatrix}=2\cdot\left(z+z^2\right)\Rightarrow |A|=0\Rightarrow 2\cdot\left(z+z^2\right)=0\Rightarrow z+z^2=0\Rightarrow z\cdot(1+z)=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} z=0 \\ z+1=0\Rightarrow z=-1 \end{cases}\Rightarrow \forall x\in\Re-\{0\,,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Con\ z=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Con\ z=-1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

Ejercicio 2.- Sea la función: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-7x+10}$

1) [2,5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de **f (x).**
2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por **f (x)** y la rectas **y = 0**, **x = 3** y **x = 4**

$a)$

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow \Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=9\geq 0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7+3}{2}=5 \\ x=\dfrac{7-3}{2}=2 \end{cases}$$

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)\Rightarrow \frac{x-1}{x^2-7x+10}=\frac{x-1}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}=\frac{A(x-5)+B(x-2)}{(x-2)(x-5)}$$

$$A(x-5)+B(x-2)=x-1\Rightarrow \begin{cases} Siendo\ x=2\Rightarrow A(2-5)+B(2-2)=2-1\Rightarrow -3A=1\Rightarrow A=-\dfrac{1}{3} \\ Siendo\ x=5\Rightarrow A(5-5)+B(5-2)=5-1\Rightarrow 3B=4\Rightarrow B=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10}=\frac{-\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{\frac{4}{3}}{x-5}\Rightarrow$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-7x+10}\,dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{4}{3}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{3}\ln t+\frac{4}{3}\ln u=\frac{1}{3}(4\ln u-\ln t)$$

$$\begin{cases} x-2=t\Rightarrow dx=dt \\ x-5=u\Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$\int\frac{x-1}{x^2-7x+10}\,dx=\frac{1}{3}(\ln u^4-\ln t)=\frac{1}{3}\ln\frac{u^4}{t}=\ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^4}{x-5}}+K$$

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\frac{x-1}{x^2-7x+10}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\notin(3\,,4)$$

$$\frac{7}{2}\in(3\,,4)\Rightarrow f\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{\frac{7}{2}-1}{\left(\frac{7}{2}\right)^2-7\cdot\left(\frac{7}{2}\right)+10}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{49}{4}-\frac{49}{2}+10}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{49-98+40}{4}}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{9}{4}}=-\frac{10}{9}<0$$

$$A=\left|\int_3^4\frac{x-1}{x^2-7x+10}\,dx\right|=\int_4^3\frac{x-1}{x^2-7x+10}\,dx=\left[\ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^4}{x-5}}\right]_4^3=\ln\sqrt[3]{\frac{(3-2)^4}{3-5}}-\ln\sqrt[3]{\frac{(4-2)^4}{4-5}}$$

$$A=\left|\int_3^4\frac{x-1}{x^2-7x+10}\,dx\right|=\ln\frac{\sqrt[3]{\frac{1^4}{-2}}}{\sqrt[3]{\frac{2^4}{-1}}}=\ln\sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{16}{-1}}}=\ln\sqrt[3]{\frac{1}{32}}$$

Ejercicio 3

Tenemos la recta $r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 3x-y=2$

1) [1 PUNTO] Demuestre que ***r*** y π son paralelos.
2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a ***r*** contenida en π.
3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de ***r*** a π.
4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{2}$?

1.- Para que la recta y el plano sean paralelos el vector director de la recta r es perpendicular al vector director del plano π, y su producto escalar es nulo

$$z=2x \Rightarrow x-y+2x=1 \Rightarrow y=-1+3x \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,3,2) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(3,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=(1,3,2)\cdot(3,-1,0)=1\cdot 3+3\cdot(-1)+2\cdot 0=3-3=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi}$$

Demostrado que ***r*** y π son paralelos

2) El vector director de la recta **t**, paralela a la recta **r**, es el vector de esta recta, hallaremos un punto **P** que pertenece al plano y con ello tenemos la ecuación de la recta pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,3,2) \\ Si\ x=2 \Rightarrow 3\cdot 2-y=2 \Rightarrow y=6-2=4 \Rightarrow P(2,4,0) \end{cases} \Rightarrow t:\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{2}$$

3) Hallaremos la distancia entre un punto cualquiera de la recta **r** (tomaremos el punto **R** determinado en su ecuación) al plano π que será la distancia pedida

$$Siendo \begin{cases} R=(0,-1,0) \\ \pi : 3x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,R)=\frac{|3\cdot 0-(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{|1-2|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\ u$$

4)

$$\overrightarrow{v_s}=(3,2,2)$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \Re$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro ***b***.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso ***b = - 2***

a) Para que haya compatibilidad el rango de la matriz ampliada tiene que ser nula

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} b+2 & 0 \\ 0 & 2-b \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = (b+2)(2-b) \Rightarrow Si\ |A/B| = 0 \Rightarrow (b+2)(2-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b+2=0 \Rightarrow b=-2 \\ 2-b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

$$\forall b \in \Re - \{-2\,,\,2\} \Rightarrow Sistema.\ Incompatible$$

$$Si\ b=-2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema. Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ b=2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow rang\ (A) = 4 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema.\ Incompatible$$

2)

$$Si\ b=-2 \Rightarrow Sistema. Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 4z=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow -y-2\cdot 0=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow -x+1=0$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (-1\,,-1\,,\,0)$$

Ejercicio 2.- Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.
1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura *h* del cilindro en función del radio *r* de la base.
2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función *a*(*r*) que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.
3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.
Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$*, área del cilindro:* 2 $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

$a)$

$$250\pi = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{250\pi}{\pi \cdot r^2} = \frac{250}{r^2}$$

$b)$

$$A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{250}{r^2} = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{250}{r}\right) = 2\pi \cdot \left(\frac{r^3 + 250}{r}\right) \Rightarrow$$

$$A' = \frac{dA}{dr} = 2\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r - \left(r^3 + 250\right)}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{3r^3 - r^3 - 250}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{2r^3 - 250}{r^2} \Rightarrow$$

$$A' = 0 \Rightarrow 4\pi \cdot \frac{r^3 - 125}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$A'' = \frac{dA'}{dr} = 4\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r^2 - 2r\left(r^3 - 125\right)}{r^4} = 4\pi \cdot \frac{3r^3 - 2r^3 + 250}{r^3} = 4\pi \cdot \frac{r^3 + 250}{r^3} \Rightarrow$$

$$A''(5) = 4\pi \cdot \frac{5^3 + 250}{5^3} = 4\pi \cdot \frac{375}{125} = 12\pi > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} r = 5\ cm \\ h = \dfrac{250}{5^2} = 10\ cm \end{cases}$$

3) Sean **r** y **s** las rectas $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \quad , t \in \Re \\ z = -2 + 3t \end{cases} \qquad s : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de ***r*** y ***s***.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre ***r*** y ***s***.
3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a ***s*** que pasa por **(0 , 1 , 0)**.

1) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden. Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \\ s : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 3\lambda \\ 2t = \lambda \\ -2 + 3t = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 0 \\ 2t - \lambda = 0 \\ 3t + 2\lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

$$Las\ rectas\ son\ paralelas\ o\ se\ cruzan \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0\,,2\,,3) \\ \overrightarrow{v_s} = (3\,,1\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{3} \neq \frac{2}{1}$$

Las recta r y s se cruzan en el espacio

Continuación del Ejercicio 3 de la opción A

2) Hallamos un plano π que contenga a la recta **s** y que sea paralelo a la recta **r.**
Para ello disponemos de los vectores directores de la rectas **r** y **s** que serán perpendiculares al vector director del plano π que es el producto vectorial de ambos vectores; este vector es perpendicular al vector SG, siendo S un punto cualquiera de la recta s (tomaremos el indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano, y el producto escalar de ellos es nulo y la ecuación pedida del plano π.
La distancia entre un punto cualquiera R de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y el plano π es la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0, 2, 3) \\ \overrightarrow{v_s} = (3, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} - 3\vec{i} = -7\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = (-7, 9, -6)$$

$$Siendo\ S(1, 0, -1) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (-7, 9, -6) \\ \overrightarrow{SG} = (x, y, z) - (1, 0, -1) = (x-1, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{SG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{SG} = 0$$

$$(-7, 9, -6) \cdot (x-1, y, z+1) = 0 \Rightarrow -7x + 7 + 9y - 6z - 6 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 7x - 9y + 6z - 1 = 0$$

$$Siendo\ R(1, 0, -2) \Rightarrow d(r, s) = d(R, \pi) = \frac{|7 \cdot 1 - 9 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2}} = \frac{|7 - 12 - 1|}{\sqrt{49 + 81 + 36}} = \frac{|-6|}{\sqrt{166}} = \frac{6\sqrt{166}}{166}$$

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{166}}{83}\ u$$

3) El plano β queda determinado por el vector director de la recta **s**, que es su vector director, y por el vector **PG**, siendo **P** el punto dado y **G** el punto genérico del plano, ambos son perpendiculares y su producto escalar es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x, y-1, z) \\ \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_s} = (3, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = 0 \Rightarrow (3, 1, -2) \cdot (x, y-1, z) = 0$$

$$3x + y - 1 - 2z = 0 \Rightarrow \beta \equiv 3x + y - 2z - 1 = 0$$