

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.-

Considere el sistema dependiente del parámetro m :
$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función de m .

2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en que el sistema sea compatible

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix} = (-m) \cdot \begin{vmatrix} -1 & m \\ 1 & -2m \end{vmatrix} = (-m) \cdot (2m - m) = -m^2 \Rightarrow \text{Si } |M| = 0 \Rightarrow -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

$\forall x \in \mathfrak{R} - \{0\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(M) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(M) = 2 \neq \text{rang}(M/N) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

2)

Si $x \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 3 & -2m & 0 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-m) \cdot \begin{vmatrix} -2 & m \\ 3 & -2m \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{4m - 3m}{m} = \frac{m}{m} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ m & 0 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-m) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{-3 - 2}{m} = -\frac{5}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -2m & 3 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & m & -2 \\ 0 & 1+m^2 & -2m \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+m^2 & -2m \\ -m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2} = \frac{1+m^2 - 2m^2}{m^2} = \frac{1-m^2}{m^2}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(1, -\frac{5}{m}, \frac{1-m^2}{m^2} \right)$$

Ejercicio 2

1) [2,5 PUNTOS] Calcule el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x}$ (ln denota logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\frac{x^d - 1}{x - 2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota

1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x^2) + x}{\ln(x+1) + x} &= \frac{\text{sen}(2 \cdot 0^2) + 0}{\ln(0+1) + 0} = \frac{\text{sen } 0}{\ln 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cos(2x^2) + 1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \\ &= \frac{4 \cdot 0 \cdot \cos(2 \cdot 0^2) + 1}{\frac{1}{0+1} + 1} = \frac{4 \cdot 0 \cdot \cos(0) + 1}{1+1} = \frac{4 \cdot 0 \cdot 1 + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2)

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d - 1}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^d}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^d}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\frac{x^d}{x^2} - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{\frac{x^d}{x^2} - 0}{1 - 0} \Rightarrow$$

$$\frac{x^d}{x^2} = 1 \Rightarrow x^d = x^2 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x - 2} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + 2x}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x} + 2 \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x} + 2}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{-\frac{1}{\infty} + 2}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{0 + 2}{1 - 0} = 2 \Rightarrow \text{Asíntota oblicua} \Rightarrow y = x + 2$$

Ejercicio 3

Sean **A** y **B** los planos $A: (0, 1, 0) + t(1, -1, 2) + s(0, 0, 1) \quad t, s \in \mathfrak{R}$ $B: x + 2y + 2z = 1$

1) [1 PUNTO] Calcule ecuación implícita (general) del plano **A**.

3) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de **A** y **B**.

4) [1 PUNTO] Calcule el ángulo formado por los planos **A** y **B**

1)

$$A \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - (y-1) \Rightarrow A \equiv x + y - 1 = 0$$

Continuación del problema 3 de la Opción de Examen nº 1

2) Los planos pueden ser paralelos o cortarse en una recta a la que definen. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo se cortarán

$$\begin{cases} \vec{v}_A = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_B = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Se cortan según una recta} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2z \Rightarrow x + 2z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-2, -2, 1) \\ \text{Punto} \Rightarrow R(1, 0, 0) \end{cases}$$

3) El coseno del ángulo α que forman los planos es el cociente entre el producto escalar de los dos vectores directores de ambos y el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \vec{v}_A = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_B = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Se cortan según una recta}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B|}{|\vec{v}_A| \cdot |\vec{v}_B|} = \frac{|(1, 1, 0) \cdot (1, 2, 2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1 + 2 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } x, y \in \mathfrak{R}$$

1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x, y para los cuales $AB = BA$

2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$. ¿Tiene A inverso en este caso?

3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen, todas, matriz inversa. Despeja la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$

1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+y & 4 \\ x+3y & x+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+x & 4 \\ 3y+x & y+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+y = 3+x \Rightarrow x = y \\ 4 = 4 \\ x+3y = 3y+x \Rightarrow 0 = 0 \\ 3y+x = y+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3x+x = x+3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9+x & 6 \\ 6x & x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6x & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9+x = 18 \Rightarrow x = 9 \\ 6 = 6 \\ 6x = 6x \\ x+9 = 18 \end{cases} \Rightarrow x = 9 \text{ Una}$$

matriz tiene inversa si su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0. \text{ A no tiene inversa cuando } x = 9$$

3)

$$N^{-1}N \cdot X \cdot R = N^{-1} \cdot S \Rightarrow I \cdot X \cdot R = N^{-1} \cdot S \Rightarrow X \cdot R = N^{-1} \cdot S \Rightarrow X \cdot R \cdot R^{-1} = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \Rightarrow X \cdot I = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \Rightarrow X = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}$$

Ejercicio 2

$$\text{Sea } f \text{ la función definida a trozos } f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + ax & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 \cdot \text{sen}(x) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en toda \mathfrak{R}

2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$ y $b = 0$, clasifique la discontinuidad en $x = -2$

3) [1 PUNTO] Si $a = 2$ y $b = 0$, calcule el área encerrado por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2 + 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = (-2)^2 + a \cdot (-2) = 4 - 2a \Rightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + a \cdot 0 = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \cdot \text{sen}(0) + b = 0 + b = b \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2

2)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + 3x & \text{si } -2 < x < 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2 + 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2 \end{array} \right. \Rightarrow 0 \neq -2$$

En $x = -2$ hay una **discontinuidad inevitable**

3)

$$f(x) = x + 2$$

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x + 2 \Rightarrow x = -2$$

$$-4 \in (-5, -3) \Rightarrow f(-4) = (-4) + 2 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$A = \left| \int_{-5}^{-3} (x+2) dx \right| = \int_{-5}^{-3} (x+2) dx = \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-5}^{-3} + 2 \cdot [x]_{-5}^{-3} = \frac{1}{2} \cdot [(-3)^2 - (-5)^2] + 2 \cdot [(-3) - (-5)]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (25 - 9) + 2 \cdot (-5 + 3) = \frac{16}{2} + 2 \cdot (-2) = 8 - 4 = 4 u^2$$

Ejercicio 3Sean el punto $A = (4, 0, 1)$ y la recta $r: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r y que pase por el punto A 2) [1,25 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) que contiene a r y a A 1) El vector director del plano π es el de la recta r , que es perpendicular al vector AG , siendo G el punto genérico del plano, y su producto escalar nulo y la ecuación pedida del plano

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (4, 0, 1) = (x-4, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow (0, 1, 1) \cdot (x-4, y, z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + z - 1 = 0$$

3) El plano β queda determinado por el vector director de la recta r , el vector AR , siendo R un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y el vector AG ya definido. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que forman) es nulo y la ecuación pedida.

$$\text{Siendo } R(2, 2, 0) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 1) \\ \vec{AR} = (2, 2, 0) - (4, 0, 1) = (-2, 2, -1) \equiv (2, -2, 1) \\ \vec{AG} = (x-4, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot (\vec{AR} \wedge \vec{AG}) = 0$$

$$\beta \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-4 + 2y - 2 \cdot (z-1) + 2 \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow \beta \equiv 3x + 2y - 2z - 10 = 0$$