	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- **a)** Sea $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro *a*, cuando M posee inversa.

(0,5 puntos)

b) Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1}. **(1,75 puntos)**

E2.- **a)** Consideremos los puntos $P(-1,-4,0)$, $Q(0,1,3)$, $R(1,0,3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R. **(1,25 puntos)**

b) Calcular *a* para que el punto $S(3,a,2)$, pertenezca al plano $\pi \equiv x+y-2z+5=0$.

(1 punto)

E3.- a) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<0 \\ x^2+ax & si \quad x\geq 0\end{cases}$, calcular *a* para que *f* sea derivable en x = 0 .

(1 punto)

b) Hallar a, b y c para que la función $f(x)=ax^2+bsenx+c$ verifique $f(0)=0,\ f'(0)=1\ \ y\ \ f''(0)=2$. **(1,25 puntos)**

E4.- **a)** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\left(x^2\right)}}{x}$ **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2,\quad g(x)=x^2-2$. **(1,25 puntos)**

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro *m* el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Resolverlo para $m = 1$. **(1 punto)**

E2.- a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,3,4) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z + 4 = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular *a* para que las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-2}{2}$, $s \equiv \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

E3.- Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2,25 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{xe^x - senx}{x^2}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular $\int \ln(x)\,dx$. **(1 punto)**

E5.- Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara? **(1 punto)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

E1.- **a)** Sea $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$. Estudiar, en función del parámetro *a*, cuando M posee inversa.

(0,5 puntos)

b) Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, calcular A^2 y A^{-1}. **(1,75 puntos)**

a) Para que tenga inversa tiene que tener determinante no nulo.

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{vmatrix}=a-6$$

Igualamos a cero.

$$|M|=0\Rightarrow a-6=0\Rightarrow a=6$$

Para cualquier valor de a distinto de 6 existe la inversa de la matriz M.

b)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6 & 2+14\\ 3+21 & 6+49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 16\\ 24 & 55\end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa comprobamos primero que el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=7-6=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

E2.- **a)** Consideremos los puntos $P(-1,-4,0)$, $Q(0,1,3)$, $R(1,0,3)$. Hallar el plano π que contiene a los puntos P, Q y R. **(1,25 puntos)**

b) Calcular *a* para que el punto $S(3,a,2)$, pertenezca al plano $\pi\equiv x+y-2z+5=0$.

(1 punto)

a) Los vectores directores del plano pueden ser:

$\overrightarrow{PQ}=(0,1,3)-(-1,-4,0)=(1,5,3)$ y $\overrightarrow{PR}=(1,0,3)-(-1,-4,0)=(2,4,3)$.

La ecuación del plano es:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pasa por Q}(0,1,3)\\ \overrightarrow{PQ}=(1,5,3)\\ \overrightarrow{PR}=(2,4,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x & y-1 & z-3\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 15x+6y-6+4z-12-10z+30-3y+3-12x=0$$

$$\pi\equiv 3x+3y-6z+15=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x+y-2z+5=0}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+y-2z+5=0\\ S(3,a,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 3+a-4+5=0\Rightarrow a+4=0\Rightarrow\boxed{a=-4}$$

E3.- a) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<0 \\ x^2+ax & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, calcular a para que f sea derivable en x = 0 . **(1 punto)**

b) Hallar a, b y c para que la función $f(x)=ax^2+bsenx+c$ verifique $f(0)=0,\ f\,'(0)=1\ \ y\ \ f\,''(0)=2$. **(1,25 puntos)**

a) $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x<0 \\ x^2+ax & si \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x<0 \\ 2x+a & si \quad x>0 \end{cases}$

Para que sea derivable en x = 0 deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-)=1 \\ f\,'(0^+)=a \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$

b)

$$f(x)=ax^2+bsenx+c \Rightarrow f\,'(x)=2ax+b\cos x \Rightarrow f\,''(x)=2a-bsenx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow 0+0+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0} \\ f\,'(0)=1 \Rightarrow 0+b=1 \Rightarrow \boxed{b=1} \\ f\,''(0)=2 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Debe ser $a=1,\quad b=1,\quad c=0$

E4.- a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\left(x^2\right)}}{x}$ **(1 punto)**

b) Hallar el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2,\quad g(x)=x^2-2$. **(1,25 puntos)**

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\left(x^2\right)}}{x}=\frac{e^0-e^0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación=}\left\{\text{Aplicamos L´Hôpital}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2xe^{\left(x^2\right)}}{1}=\frac{e^0-2\cdot 0\cdot e^0}{1}=\frac{1-0}{1}=\boxed{1}$$

b) Averigüemos los puntos de corte de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow -x^2=x^2-2\Rightarrow -2x^2=-2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Las dos funciones coinciden en x = –1 y x = 1. El área de la región entre ellas valdrá el valor absoluto de la integral definida siguiente:

$$\int_{-1}^{1} x^2-2-\left(-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1} 2x^2-2dx=\left[2\frac{x^3}{3}-2x\right]_{-1}^{1}=\left[2\frac{1^3}{3}-2\cdot 1\right]-\left[2\frac{\left(-1\right)^3}{3}-2\left(-1\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{3}-2+\frac{2}{3}-2=\frac{4}{3}-4=\frac{-8}{3}$$

El área es $\dfrac{8}{3}u^2$.

E5.- De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 negras y 2 amarillas se extraen dos sin devolución (es decir, una vez extraída una bola no se vuelve a poner en la bolsa). Calcular la probabilidad de que las dos sean blancas. **(1 punto)**

$$P\left(\text{Extraer las dos bolas blancas}\right) = P\left(\text{Extraer la 1}^{\text{a}}\text{ blanca}\right)\cdot P\left(\text{Extraer la 2}^{\text{a}}\text{ blanca / 1}^{\text{a}}\text{ ha salido blanca}\right) =$$

$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = \boxed{0,066}$$

OPCIÓN B

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro *m* el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$ **(1,25 puntos)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

a) Como tiene más incógnitas que ecuaciones este sistema nunca va a ser compatible determinado, solo puede ser compatible indeterminado o incompatible.
Pasamos la incógnita x al segundo miembro de la igualdad.

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1-mx \\ y+2z=1-x \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrl} y & +2z & =1-x \\ -y & -z & =-1+mx \\ \hline & z & =mx-x \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z=1-mx \\ \boxed{z=mx-x} \end{cases} \Rightarrow y+mx-x=1-mx \Rightarrow \boxed{y=1-2mx+x}$$

Este sistema equivalente tiene siempre solución, no depende del valor de m. Es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.
Las soluciones son $x=t, \quad y=1-2mt+t, \quad z=mt-t$

b) Para $m=1$ el sistema tiene la solución $x=t, \quad y=1-2t+t=1-t, \quad z=t-t=0$.
Las soluciones son $x=t, \quad y=1-t, \quad z=0$

E2.- a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,3,4) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+2z+4=0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular *a* para que las rectas $r \equiv x-1=y-2=\frac{z-2}{2}$, $s \equiv \frac{x-1}{a}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{3}$ sean perpendiculares. **(1 punto)**

a) Si la recta es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+2z+4=0$ el vector director de la recta es el normal del plano $\overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,2)$ y la recta tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ \text{Pasa por } P(2,3,4) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de sus respectivos vectores directores debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(a,2,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow (1,1,2)(a,2,3)=0 \Rightarrow a+2+6=0 \Rightarrow \boxed{a=-8}$$

E3.- Consideremos la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. Calcular el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2,25 puntos)**

El dominio de la función es R, ya que el denominador no se anula.

$x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\sqrt{-2}$ Esto es imposible.

Asíntota vertical. $x=a$

No hay ningún valor excluido del dominio, luego no hay asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La asíntota horizontal es $y=1$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al existir asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.

Para estudiar crecimiento o decrecimiento calculamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x^3+4x-2x^3-2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

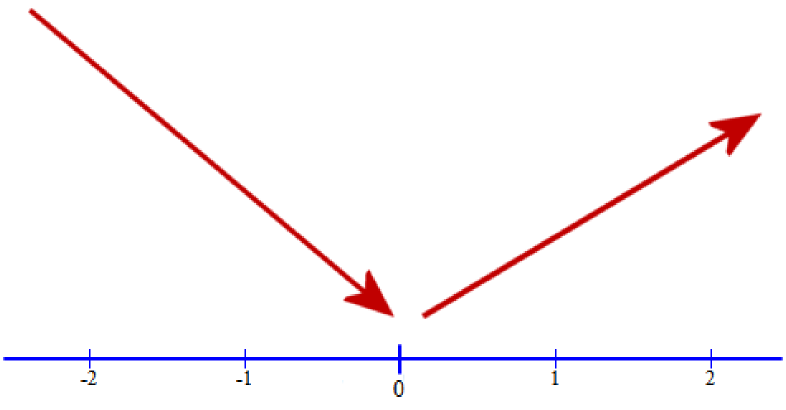
Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

Veamos si crece o decrece la función antes de 0 y después de 0.

En $(-\infty,0)$ tomamos el valor x = –1 la derivada vale $f'(-1)=\frac{2(-1)}{\left((-1)^2+2\right)^2}=\frac{-2}{9}<0$. La función decrece.

En $(0,+\infty)$ tomamos el valor x = 1 la derivada vale $f'(1)=\frac{2(1)}{\left((1)^2+2\right)^2}=\frac{2}{9}>0$. La función crece.

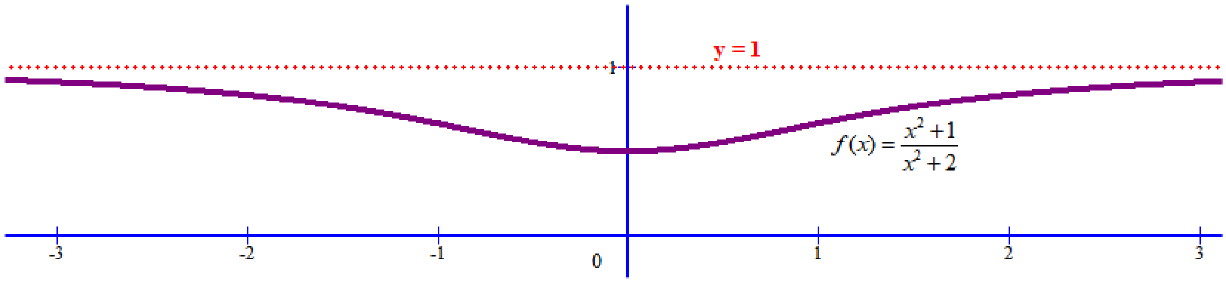


La función presenta un mínimo relativo en x = 0.

Es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$.

Obtenemos una serie de puntos y dibujamos su gráfica

x	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$
-2	$5/6$
-1	$2/3$
0	$1/2$
1	$2/3$



E4.- a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x - senx}{x^2}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcular $\int \ln(x)\,dx$. **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-senx}{x^2}=\frac{0\cdot e^0-sen0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\{\text{Aplico L´Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\cos x}{2x}=\frac{e^0+0\cdot e^0-\cos 0}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\{\text{Aplico L´Hôpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\text{sen}\,x}{2}=\frac{e^0+e^0+0\cdot e^0+\text{sen}\,0}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

b)

$$\int \ln(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=x\end{array}\right\}=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=\boxed{x\ln x-x+C}$$

E5.- Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que en la moneda salga cara? **(1 punto)**

P(Salga un 5 en dado y cara en la moneda) = P(Salga un 5 en dado) · P(Salga cara en la moneda) =

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{12}}$$