Opción A

Ejercicio A1

Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

- **El primero de ellos, x, es la suma de los otros dos.**
- **El segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.**

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen esas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. (1′5 puntos)

Se nos plantea el siguiente sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x = y + z \\ y = \dfrac{x}{2} + 3z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

Y se nos pide demostrar que hay un número infinito de soluciones, es decir, que se trata de un sistema compatible indeterminado. Por el teorema de Rouché–Frobenius, para que así sea, ha de cumplirse:

$$\text{rango}(M) = \text{rango}(A) < n = 3, \qquad (n = \text{número de incógnitas})$$

Donde M representa la matriz de los coeficientes y A, la matriz ampliada con los términos independientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Evidentemente, por tener ambas dos filas, su máximo rango posible es dos y, de hecho, es dos, pues en ambas encontramos (al menos) el siguiente determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

En consecuencia:

$$\boxed{\text{rango}(M) = \text{rango}(A) = 2 < n = 3 \xRightarrow[\text{Rouché–Frobenius}]{\text{Teorema de}} \begin{array}{c}\text{Sistema compatible indeterminado} \\ \text{(infinitas soluciones)}\end{array}}$$

Para resolverlo, trataremos una de las incógnitas como un parámetro, por ejemplo, haciendo $z = \lambda$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 6\lambda & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & -6\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & -1 & -7\lambda \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - y = \lambda \\ -y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Por tanto:

$$\boxed{z = 8\lambda, \;\; y = 7\lambda, \;\; z = \lambda}$$

Autor: ENRIQUE CASTAÑOS GARCÍA enrique.castanos.garcia@gmail.com

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. (0'5 puntos)

Se trata de un sistema de ecuaciones homogéneo (todos los términos independientes son nulos), con infinitas soluciones, entre ellas, la solución trivial (que se obtiene haciendo $\lambda = 0$ en el conjunto de las soluciones obtenido anteriormente):

$$\boxed{x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0}$$

Nota: dando cualquier otro valor real a λ se obtiene un nuevo conjunto de soluciones.

Ejercicio A2

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$:

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r. (1 punto)

Expresamos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

La intersección de la recta r con el plano π se deduce al sustituir las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π:

$$2 \cdot (1 - \lambda) + (-1) + \lambda - 3 = 0$$

$$2 - 2\lambda - 1 + \lambda - 3 = 0$$

$$-\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

En consecuencia, el punto $P(x, y, z) = \pi \cap r$ es:

$$\begin{cases} x = 1 - (-2) \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{P = (3, -1, -2)}$$

También podrían haberse determinado las coordenadas (x, y, z) del punto P resolviendo el sistema formado por la ecuación general del plano y las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \longrightarrow \boxed{P = (3, -1, -2)}$$

b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r. (1 punto)

La recta s está contenida en el plano π, luego su vector director, $\vec{v}_s$, es perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n} = (2, 1, 1)$. También es perpendicular a la recta r, por lo que $\vec{v}_s$ es, a su vez, perpendicular al vector director de r, $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$.

En consecuencia, $\vec{v}_s = \vec{n} \times \vec{v}_r$:

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath} + \vec{k} \longrightarrow \vec{v}_s = (1, -3, 1)$$

Además, sabemos que s corta a r, luego el punto de corte debe ser la intersección de r con π (ya que s pertenece a π), es decir, el punto $P = (3, -1, -2)$, que se ha calculado anteriormente.

Por lo tanto, la recta s resulta:

$$\left.\begin{array}{r} P = (3, -1, -2) \\ \vec{v}_s = (1, -3, 1) \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{1}}$$

Ejercicio A3

Sea la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x} + ax + b}$$

a) Encontrar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\boldsymbol{(1/2\,, 6)}$. (1 punto)

La función presenta un mínimo relativo cuando $x = 1/2$, por lo que ha de cumplirse que $f'(1/2) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a \longrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4 + a = 0 \longrightarrow \boxed{a = 4}$$

Teniendo en cuenta que la gráfica de la función pasa por el punto $(1/2\,, 6)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \longrightarrow 2 + \frac{a}{2} + b = 6 \xrightarrow{a=4} \boxed{b = 2}$$

Se comprueba que en $x = 1/2$ hay, efectivamente, un mínimo, evaluando el signo de $f''(1/2)$:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \longrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = -16 < 0 \quad \text{(se trata de un mínimo)}$$

b) Suponiendo que $\boldsymbol{a = 4}$ y $\boldsymbol{b = 2}$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. (1 punto)

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4x + 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, ya que en $x = 0$ la función no está definida. En consecuencia:

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}}$$

Evaluamos el límite de la función cuando $x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} + 4x + 2\right) \longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0-}\left(\frac{1}{x} + 4x + 2\right) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0-}\left(\frac{1}{x} + 4x + 2\right) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Asíntota vertical} \\ x = 0\end{array}}$$

Autor: Enrique Castaños García enrique.castanos.garcia@gmail.com

Evaluamos los límites infinitos de la función:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 4x + 2\right) = +\infty \longrightarrow \boxed{\text{No hay asíntota horizontal cuando } x \longrightarrow +\infty}$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + 4x + 2\right) = -\infty \longrightarrow \boxed{\text{No hay asíntota horizontal cuando } x \longrightarrow -\infty}$$

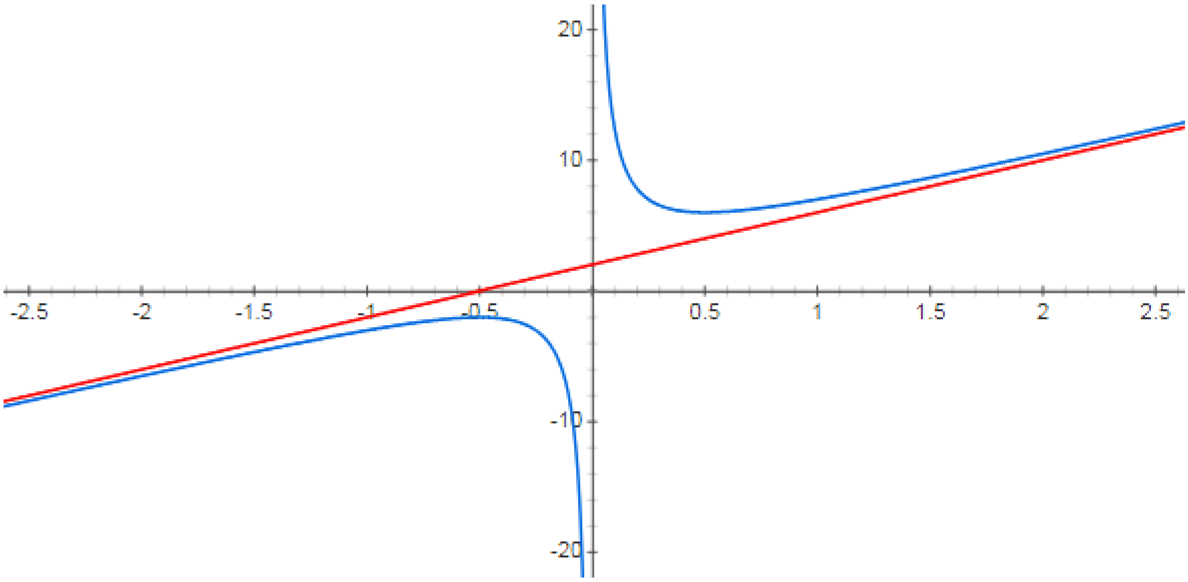
Consideramos la posibilidad de que exista una asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$, donde:

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 4x + 2}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1 + 4x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 4x + 2 - 4x\right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Hay asíntota oblicua } y = 4x + 2}$$



Ejercicio A4

Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x$:

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Encontrar el punto en el que se cortan ambas rectas tangentes. (1 punto)

La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto (x_0, y_0) viene dada por:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Siendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$. Así, la recta tangente a la gráfica de f cuando $x_0 = 0$ es:

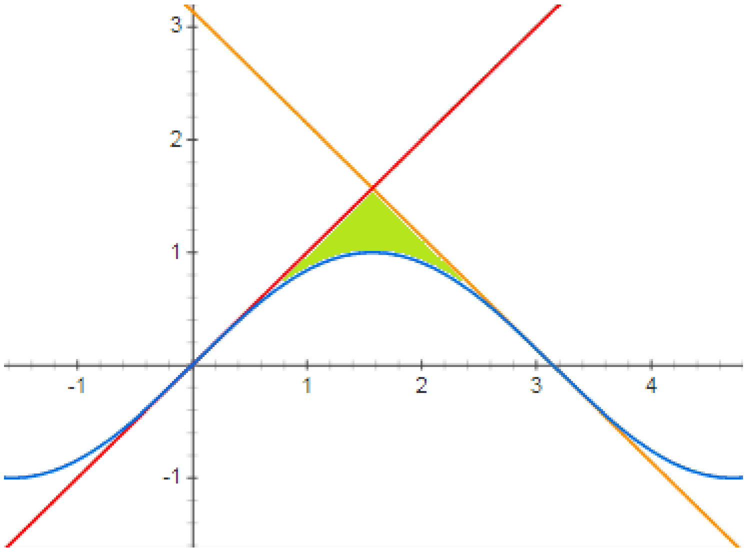
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ f'(0) = \cos 0 = 1 \end{array}\right\} \longrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Longrightarrow \boxed{y = x}$$

Y la recta tangente a la gráfica de f cuando $x_0 = \pi$ es:

$$\left.\begin{array}{r} f(\pi) = \operatorname{sen}\pi = 0 \\ f'(\pi) = \cos\pi = -1 \end{array}\right\} \longrightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Longrightarrow \boxed{y = -x + \pi}$$

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones $y = x$ e $y = -x + \pi$. (1 punto)

Se trata de calcular el área del recinto que aparece sombreado en la siguiente representación:



La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ corta al eje X en:

$$\operatorname{sen} x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Y las rectas $y = x$ (tangente a la gráfica de f en $x = 0$) e $y = -x + \pi$ (tangente a la gráfica de f en $x = \pi$) se cortan en:

$$x = -x + \pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

En consecuencia, el área pedida es igual a:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \operatorname{sen} x) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi - \operatorname{sen} x) \cdot dx$$

Aunque, si tenemos en cuenta la simetría de la representación:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \operatorname{sen} x) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left[\left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2} + \cos 0\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{\pi^2}{8} + 0\right) - (0 + 1)\right] = 2 \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ u}^2}$$

Ejercicio A5

Se lanzan tres monedas al aire:

a) Hallar el espacio muestral. (1 punto)

$$\boxed{E=\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ XCC,\ CXX,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}}$$

b) Hallar la probabilidad de: i) obtener más caras que cruces; ii) obtener las mismas caras que cruces. (1 punto)

Teniendo en cuenta la Ley de Laplace:

$$P(\text{más caras que cruces})=\frac{\text{Número de casos en los que salen más caras que cruces}}{\text{Número de casos posibles}}=\frac{4}{8}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte, como se trata de un lanzamiento de tres monedas, no es posible que salga el mismo número de caras que de cruces, así que:

$$P(\text{mismas caras que cruces})=\boxed{0}$$

Opción B

Ejercicio B1

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$**:**

a) Discutir, según los valores de k, cuando A tiene inversa y calcularla para $k=2$. (1 punto)

Para que una matriz A tenga inversa, debe cumplirse que $|A|\neq 0$. Así que evaluamos el valor de $|A|$ en función del parámetro k:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}=k-1=0\longrightarrow k=1$$

En consecuencia:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si }\ k=1\longrightarrow |A|=0\Longrightarrow \nexists\ A^{-1}\\ \text{Si }\ k\neq 1\longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \exists\ A^{-1}\end{array}}$$

Calculamos A^{-1} cuando $k=2$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad |A|=1,\qquad A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},\qquad \operatorname{Adj}(A^t)=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{Adj}(A^t)\longrightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) Para $k = 2$, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX + B = AB$. (1 punto)

Despejamos X en la ecuación matricial propuesta:

$$AX + B = AB \longrightarrow AX = AB - B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}AB - A^{-1}B \xrightarrow{A^{-1}A=I} X = B - A^{-1}B$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio B2

Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$:

a) Encontrar a y b para que la recta esté contenida en el plano. (1 punto)

La recta r pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$ y su vector director es $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$. Para que r esté contenida en el plano π, el vector $\vec{v}_r$ debe ser perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n}_\pi = (a, 1, -1)$, y para ello imponemos que:

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0 \longrightarrow (a, 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = a - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{a = 2}$$

Además, también ha de cumplirse que el punto P de r pertenezca al plano π:

$$\pi \equiv ax + y - z + b = 0 \xrightarrow{P=(1,2,3)} a + 2 - 3 + b = 0 \xrightarrow{a=2} \boxed{b = -1}$$

Estrategia de resolución alternativa

Expresamos r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Si hacemos $\lambda = 1$, obtenemos otro punto Q de la recta: $Q = (2, 1, 4)$.

Si queremos saber los valores de a y b que hacen que r pertenezca al plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$, impondremos que los puntos P y Q, que pertenecen a r, satisfagan a su vez la ecuación del plano:

$$\pi \equiv ax + y - z + b = 0 \xrightarrow{P=(1,2,3)} a + 2 - 3 + b = 0 \longrightarrow a + b = 1 \quad \text{[Ecuación 1]}$$

$$\pi \equiv ax + y - z + b = 0 \xrightarrow{Q=(2,1,4)} 2a + 1 - 4 + b = 0 \longrightarrow 2a + b = 3 \quad \text{[Ecuación 2]}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones obtenido se deduce que:

$$\boxed{a = 2} \quad \boxed{b = -1}$$

b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. (1 punto)

Si la recta r fuese perpendicular al plano π, el vector director de r, $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$, sería proporcional al vector normal de π, $\vec{n}_\pi = (a, 1, -1)$. Para ello:

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \longrightarrow \frac{1}{a} = -1 \longrightarrow \boxed{a = -1}$$

Es decir, <u>cualquier plano de la forma $\pi \equiv -x + y - z + b = 0$ será perpendicular a la recta r, sea cual sea el valor de b</u> (hay infinitos planos, paralelos entre sí, dependiendo del valor que demos a b, que serán perpendiculares a r).

Ejercicio B3

De todos los rectángulos cuyo perímetro es 40 cm, encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. (2 puntos)

Sea x la base del rectángulo, y su altura y d la longitud de su diagonal (todas en cm). Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo debe ser 40 cm:

$$2x + 2y = 40 \longrightarrow x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$$

Sustituyendo en la expresión de la diagonal, se obtiene una expresión que únicamente es función de x:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{x^2 + (400 - 40x + x^2)} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$$

Como queremos calcular las dimensiones del rectángulo que hacen que su diagonal sea mínima, debemos minimizar la función $d(x)$, para lo cual se deriva e iguala a cero:

$$d'(x) = \frac{4x - 40}{2 \cdot \sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = \frac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = 0 \longrightarrow 2x - 20 = 0 \longrightarrow 2x = 20 \longrightarrow \boxed{x = 10 \text{ cm}}$$

Siendo la longitud de la base del rectángulo de 10 cm, la altura debe ser:

$$y = 20 - x \longrightarrow \boxed{y = 10 \text{ cm}}$$

Conviene comprobar que en $x = 10$, efectivamente, aparece un mínimo relativo en la función $d(x)$. Para ello, evaluamos el signo de $d''(10)$:

$$d''(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{2x^2 - 40x + 400} - (2x - 20) \cdot \dfrac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}}}{2x^2 - 40x + 400} = \frac{\dfrac{2 \cdot (2x^2 - 40x + 400) - (2x - 20)^2}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}}}{2x^2 - 40x + 400} =$$

$$= \frac{4x^2 - 80x + 800 - (4x^2 - 80x + 400)}{\sqrt{(2x^2 - 40x + 400)^3}} = \frac{400}{\sqrt{(2x^2 - 40x + 400)^3}}$$

$$d''(10) = \frac{400}{200} = 2 > 0 \longrightarrow \boxed{\text{Mínimo cuando } x = 1}0$$

Ejercicio B4

a) Calcular: (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x-\operatorname{sen}x}{e^x+x}$$

El límite de la función $\operatorname{sen}x$ cuando $x\longrightarrow+\infty$ no está definido, por ser una función periódica acotada entre -1 y $+1$. En todo caso, siempre tomará valores reales pertenecientes al intervalo $[-1,1]$, por lo que:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x-\operatorname{sen}x}{e^x+x}=\underbrace{\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x}{e^x+x}}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}-\underbrace{\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x+x}}_{\frac{\text{número}}{\infty}=0}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x}{e^x+x}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x}{e^x+x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x}{e^x+1}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3e^x}{e^x}=\boxed{3}$$

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)=|x|-1$ y $g(x)=1-x^2$. (1 punto)

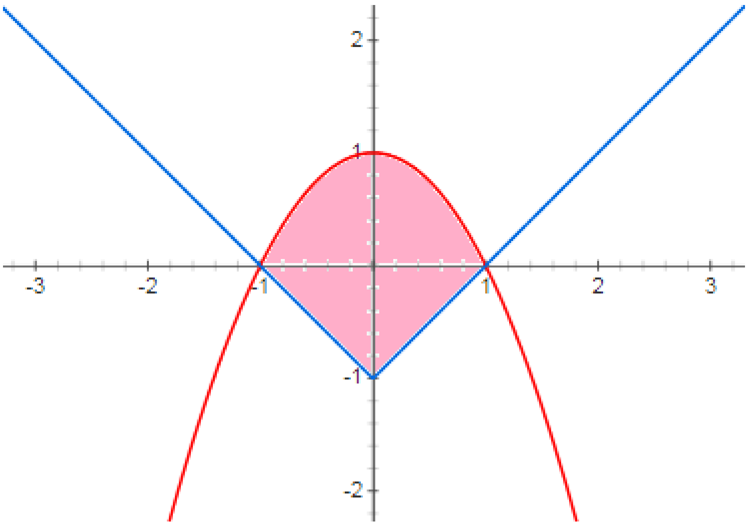
Redefinimos la función $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } x\geq 0\\ -x-1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Luego su gráfica está formada por dos rectas: la primera, cuando x es negativa, que es decreciente, con pendiente -1; la segunda, a partir de $x=0$, que es creciente, con pendiente $+1$. Ambas se juntan en el punto $(0,-1)$.

Por su parte, la función $g(x)$ es una parábola, cuyo vértice es un máximo, en el punto $(0,1)$, y que corta al eje de las x en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Con esta información podemos esbozar sus gráficas e identificar el recinto cuya área hay que calcular:



Calculamos los puntos de corte entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$:

$$|x| - 1 = 1 - x^2 \longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 - x^2 \longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 & (\text{válida, pues } x > 0) \\ x = -2 & (\text{no válida}) \end{cases} \\ -x - 1 = 1 - x^2 \longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 & (\text{no válida}) \\ x = -1 & (\text{válida, pues } x < 0) \end{cases} \end{cases}$$

En definitiva, el área pedida es igual a:

$$A = \int_{-1}^{0} [(1 - x^2) - (-x - 1)] \cdot dx + \int_{0}^{1} [(1 - x^2) - (x - 1)] \cdot dx$$

O bien, por la simetría de la representación:

$$A = 2 \cdot \int_{-1}^{0} [(1 - x^2) - (-x - 1)] \cdot dx = 2 \cdot \int_{-1}^{0} (-x^2 + x + 2) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{0} =$$

$$= 2 \cdot \left[0 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{14}{6} \longrightarrow \boxed{A = \frac{7}{3} \text{ u}^2}$$

Ejercicio B5

El diámetro interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? (1 punto)

El diámetro interior de un anillo es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ cm y desviación típica $\sigma = 0{,}03$ cm:

$$X \sim N(10; 0{,}03)$$

Se nos pide la probabilidad $P(X > 10{,}075)$. Tipificando la variable:

$$P(X > 10{,}075) = P\left(Z > \frac{10{,}075 - 10}{0{,}03} \right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = \boxed{0{,}0062}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? (1 punto)

En este caso, se nos pide la probabilidad $P(9{,}97 < X < 10{,}03)$. Tipificando de nuevo la variable:

$$P\left(\frac{9{,}97 - 10}{0{,}03} < Z < \frac{10{,}03 - 10}{0{,}03} \right) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) =$$

$$= P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = \boxed{0{,}6826}$$