# Opción A

## Ejercicio A1

**a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $\lambda$:** (1'2 puntos)

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Recurriremos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Así que comenzaremos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

$$\text{Matriz de los coeficientes} \longrightarrow M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada} \longrightarrow M^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación evaluamos el rango de $M$, en función de los valores de $\lambda$ para los que $|M| = 0$:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\text{Si } |M| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Así pues, si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$, el rango de $M$ es 3. Si $\lambda = 1$ o $\lambda = -2$ el rango de $M$ es 2, pues siempre existe al menos un determinante de orden 2 no nulo en ella. Por tanto:

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$:

  En este caso, $ran(M) = ran(M^*) = 3$, que coincide con el número $n$ de incógnitas:

  $$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq -2 \longrightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$$

- Si $\lambda = 1$:

  En este caso, el $ran(M) = (M^*) = 2$, ya que en la matriz ampliada hay tres columnas idénticas (no encontraremos ningún determinante de orden tres en ella no nulo):

  $$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$\boxed{\text{Si } \lambda = 1 \longrightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}}$$

- Si $\lambda = -2$:

  En este caso, $ran(M) = 2$, pero $ran(M^*) = 3$, ya que podemos encontrar algún determinante de orden tres no nulo en ella:

$$M^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda = -2 \longrightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}}$$

**b) Resolverlo para $\lambda = 1$.** (0'8 puntos)

$$\text{Si } \lambda = 1 \longrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

En este caso el sistema es compatible indeterminado y depende de un parámetro:

$$\boxed{z = \mu}$$

Por lo que, al sustituir en las dos primeras ecuaciones, se deduce:

$$x + \lambda = 1 \longrightarrow \boxed{x = 1 - \mu}$$

$$x + y + z = 1 \longrightarrow 1 - \mu + y + \mu = 1 \longrightarrow \boxed{y = 0}$$

## Ejercicio A2

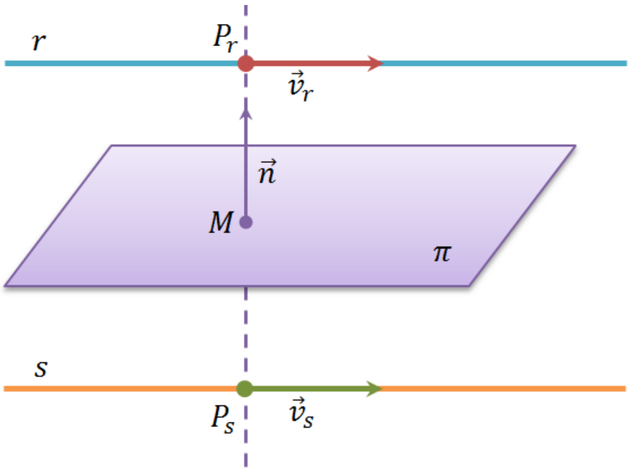
**Determina la recta $s$ que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$ respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.** (2 puntos)

De la ecuación de $r$ deducimos que pasa por el punto $P_r = (-2, 0, 2)$ y su vector director es $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$. De la ecuación de $\pi$ obtenemos su vector normal $\vec{n} = (1, 0, -1)$. Es fácil comprobar que:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1,1,1) \cdot (1,0,-1) = 1 + 0 - 1 = 0 \Longrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}$$

$$P \notin \pi \equiv x - z + 2 = 0$$

Es decir, $r$ y $\pi$ son paralelos, y podemos plantear el problema de la siguiente manera:



La recta $s$, que es simétrica de $r$ respecto de $\pi$, también es paralela al plano y tiene la misma dirección que la recta $r$, por lo que su vector director es:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1,1,1)$$

De modo que, para determinar la ecuación de $s$, debemos conocer el punto $P_s$ que es simétrico del punto $P_r$ respecto del plano $\pi$. Para ello:

— Obtenemos la recta $t$ perpendicular al plano $\pi$ que pasa por $P_r = (-2,0,2)$, la cual tendrá como vector director el vector $\vec{n} = (1,0,-1)$:

$$t = \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

— Calculamos la proyección del punto $P_r$ sobre el plano $\pi$, es decir, el punto $M$ que es la intersección entre la recta $t$ y el plano. Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de $t$ en la ecuación del plano:

$$-2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \longrightarrow 2\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda = 1$$

Luego el punto $M$ es:

$$\begin{cases} x = -2 + 1 = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \longrightarrow M = (-1,0,1)$$

— Siendo $M$ el punto medio entre $P_r = (-2,0,2)$ y $P_s = (x,y,z)$, hallamos este último:

$$M = \left(\frac{-2+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{2+z}{2}\right) = (-1,0,1) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+x}{2} = -1 \longrightarrow x = 0 \\ \dfrac{y}{2} = 0 \longrightarrow y = 0 \\ \dfrac{2+z}{2} = 1 \longrightarrow z = 0 \end{cases} \Longrightarrow P_s = (0,0,0)$$

En definitiva, la recta $s$, cuyo vector director es $\vec{v}_s = (1,1,1)$ y que pasa por $P_s = (0,0,0)$, es:

$$\boxed{s \equiv x = y = z}$$

## Ejercicio A3

**Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula.** (2 puntos)

Comenzamos calculando la derivada de la función $f(x)$:

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$

Obtenemos los valores de $x$ para los cuales $f'(x) = 0$:

$$12x^3 + 3x^2 = 0 \longrightarrow x^2 \cdot (12x + 3) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento evaluando el signo de $f'(x)$ en torno a estos valores de $x$:

| $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ | $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)<0$ | $f'(x)>0$ | $f'(x)>0$ |
| Decreciente | Creciente | Creciente |

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \text{ decrece en } \left(-\infty,-\frac{1}{4}\right) \\ f(x) \text{ crece en } \left(-\frac{1}{4},+\infty\right) \end{array}}$$

Del estudio de la monotonía de la función se desprende que hay un mínimo cuando $x=-1/4$ y un punto de inflexión en $x=0$, algo que podemos verificar a partir del signo de la segunda derivada de $f(x)$ para dichos valores de $x$:

$$f''(x)=36x^2+6x$$

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}>0\longrightarrow \boxed{\text{Mínimo en } \left(-\frac{1}{4},-\frac{257}{256}\right)}$$

$$f''(0)=0\longrightarrow \boxed{\text{Punto de inflexión en } (0,-1)}$$

Para determinar el número de puntos en los que $f(x)$ se anula recurriremos al teorema de Bolzano. En primer lugar, tendremos en cuenta que la función decrece hasta alcanzar el mínimo cuando $x=-1/4$, y que $f(-1/4)<0$ (negativo). Además, comprobamos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \ \text{(positivo)}$$

Como $f(x)$ es siempre continua y cambia de signo entre $-\infty$ y $-1/4$, entonces podemos asegurar que existe un valor $x=a$ para el cual $f(a)=0$. Además, sabemos que en el intervalo $(-\infty,-1/4)$ la función es siempre decreciente, lo cual nos permite garantizar que $a$ es el único valor de $x$, perteneciente a dicho intervalo, en el cual la función se anula.

De la misma manera, razonaremos lo que ocurre cuando $x>-1/4$. Se comprueba que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \ \text{(positivo)}$$

Así que $f(x)$ cambia de signo entre $-1/4$ y $+\infty$, por lo que existe un valor $x=b$ para el cual $f(b)=0$. Como en el intervalo $(-1/4\,,+\infty)$ la función es siempre creciente, no existe otro valor de $x$ en dicho intervalo, en el cual la función sea nula.

En definitiva:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La función se anula únicamente para dos valores de } x\text{:} \\ \text{un valor } a\in(-\infty,-1/4) \text{ y otro valor } b\in(-1/4\,,+\infty) \end{array}}$$

## Ejercicio A4

**Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot \cos x$ y el eje de las $x$, cuando $x$ pertenece al intervalo $[0, \pi/2]$.** (2 puntos)

En primer lugar, determinamos los valores de $x \in [0, \pi/2]$ para los cuales $f(x) = 0$:

$$x \cdot \cos x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \longrightarrow x = \pi/2 \end{cases}$$

Es decir, la función no cruza el eje de las $x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. Así que el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las $x$ viene dada por la integral definida:

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx$$

Que puede resolverse mediante el método de integración por partes:

$$x = u \longrightarrow dx = du, \qquad dv = \cos x \cdot dx \longrightarrow v = \int \cos x \cdot dx = \operatorname{sen} x$$

Calculamos la integral indefinida:

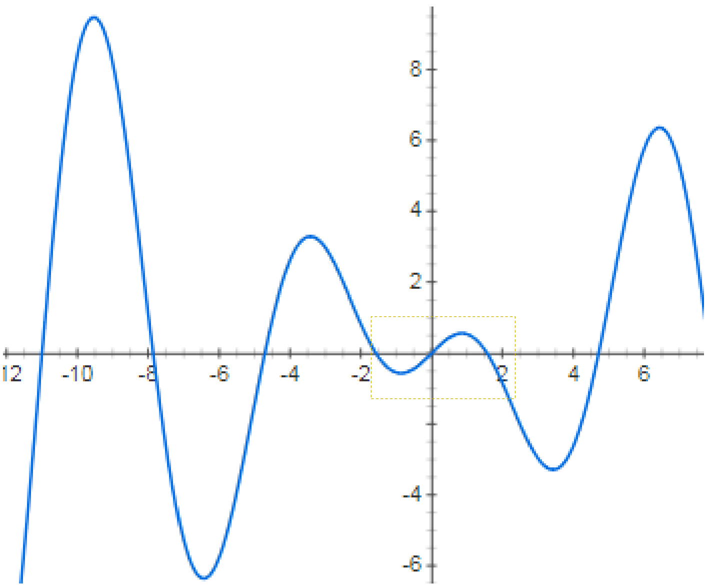
$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

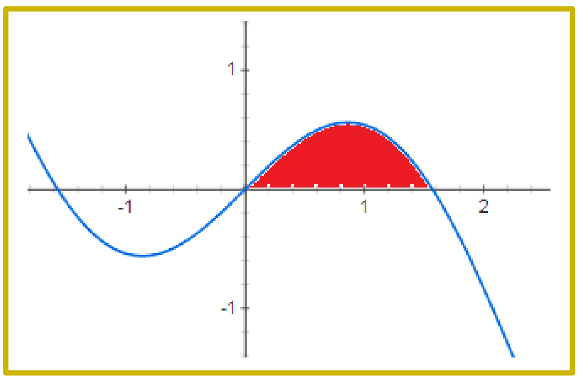
Luego el área resulta:

$$A = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx = [x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0\right) - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1 = \boxed{\frac{\pi - 2}{2}\ \mathrm{u}^2}$$

Gráficamente, el área calculada es la que se señala a continuación (no es necesario hacer la gráfica):



## Ejercicio A5

**a)** **Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden salgan una cara y dos cruces.** (1 punto)

Si tiramos una moneda (no trucada) tres veces, los resultados pueden ser:

$$CCC, \quad CCX, \quad CXC, \quad XCC, \quad CXX, \quad XCX, \quad XXC, \quad XXX$$

Donde $C$ representa el suceso "salir cara" y $X$, "salir cruz". Es decir, pueden darse 8 tiradas distintas, de las cuales solo en 3 salen dos cruces y una cara:

$$CXX, \quad XCX, \quad XXC$$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$\text{Ley de Laplace} \longrightarrow P = \frac{\text{número de sucesos favorables}}{\text{número de sucesos posibles}} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

También puede plantearse como una distribución binomial, donde se considera *éxito* el suceso "salir cruz" y *fracaso*, el suceso "salir cara", siendo la probabilidad de éxito $p = 1/2$ y de fracaso, $q = 1/2$. De esta manera, la variable aleatoria $X =$ "número de veces que sale cruz en $n$ tiradas" puede representarse como:

$$X \sim B(n, p) \longrightarrow X \sim B(3, 1/2)$$

Luego la probabilidad de que ocurran $k = 2$ éxitos en $n = 3$ tiradas (es decir, dos cruces y una cara, sin importar el orden en que aparecen) es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \longrightarrow P(k = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{3}{8}}$$

**b)** **Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas.** (1 punto)

Llamamos $C$ al suceso "salir copas". La probabilidad de no sacar una copa en la primera extracción es:

$$P(\overline{C_1}) = \frac{30}{40}$$

Luego la probabilidad de no sacar una copa en la segunda extracción, si no se ha sacado una copa en la primera extracción es (ahora hay una carta menos que no es de copas; no hay reemplazamiento):

$$P(\overline{C_2} | \overline{C_1}) = \frac{29}{39}$$

En consecuencia, la probabilidad de que ninguna de las dos cartas sea de copas es:

$$P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{C_1}) \cdot P(\overline{C_2} | \overline{C_1}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52} = \boxed{0{,}558}$$

## Opción B

### Ejercicio B1

**Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, calcúlense $a$ y $b$ para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.** (2 puntos)

En primer lugar, calculamos las matrices $M\cdot A$ y $M+B$:

$$M\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ a+2b & 2a+5b\end{pmatrix}$$

$$M+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a+1 & b+1\end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $|MA|=2$ y $|M+B|=3$:

$$\begin{vmatrix}3 & 7\\ a+2b & 2a+5b\end{vmatrix}=6a+15b-7a-14b=2\longrightarrow -a+b=2$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ a+1 & b+1\end{vmatrix}=2b+2-a-1=3\longrightarrow -a+2b=2$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que se ha obtenido:

$$\begin{cases}-a+b=2\\ -a+2b=2\end{cases}\longrightarrow \boxed{\begin{matrix}a=-2\\ b=0\end{matrix}}$$

### Ejercicio B2

**Dados la recta $r\equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi\equiv x-y+z=0$, se pide:**

**a) Determinar la posición relativa de $r$ y $\pi$.** (0,8 puntos)

La recta $r$ pasa por el punto $P=(1,-1,1)$ y su vector director es $\vec{v}_r=(1,2,1)$. El plano $\pi$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,-1,1)$.

Para determinar la posición relativa de $r$ y $\pi$, calculamos el producto escalar de $\vec{v}_r$ y $\vec{n}$:

$$\vec{v}_r\cdot\vec{n}=(1,2,1)\cdot(1,-1,1)=1-2+1=0$$

Como $\vec{v}_r\cdot\vec{n}=0$, necesariamente debe cumplirse que $\vec{v}_r\perp\vec{n}$, lo que significa que $r$ y $\pi$ pueden ser paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P$ de la recta pertenece al plano:

$$1-(-1)+1=3\neq 0$$

Por lo tanto, $P\notin\pi$ y podemos asegurar que:

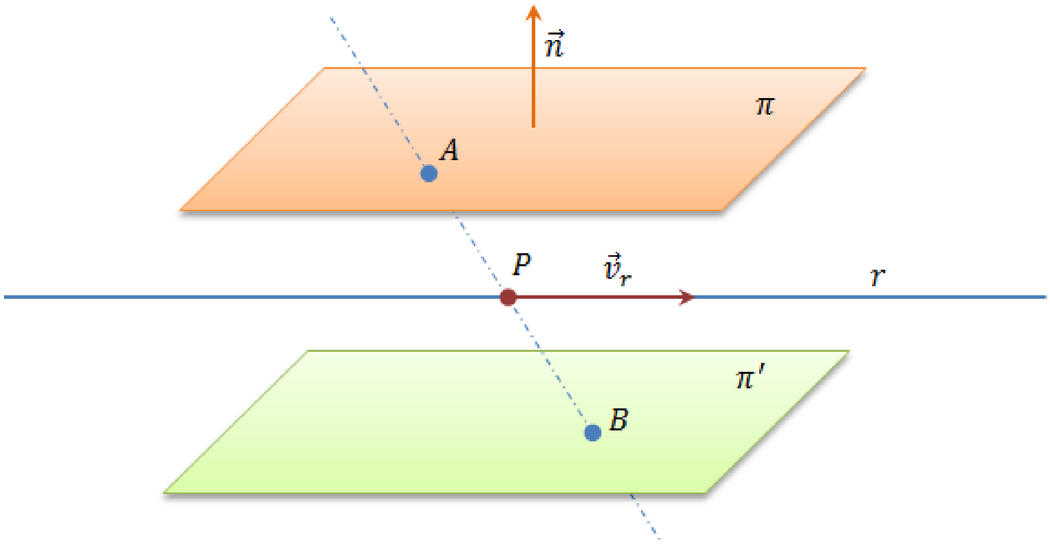
$$\boxed{r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}}$$

**b) Hallar el plano paralelo a $\pi$ situado a la misma distancia de $r$ que $\pi$.** (1'2 puntos)

Un plano paralelo a $\pi$, que llamaremos $\pi'$, debe tener el mismo vector normal que $\pi$, por lo que su ecuación general será de la forma:

$$\pi' = x - y + z + D = 0$$

Para determinar el término $D$ desconocido, debemos conocer un punto del plano $\pi'$. Este punto puede ser el punto simétrico de cualquier punto del plano $\pi$ respecto del punto $P$, que pertenece a $r$:




Para ello:

— Obtenemos un punto $A \in \pi \equiv x - y + z = 0$, por ejemplo (si $x = 0$ e $y = 0$, entonces $z = 0$):

$$A = (0, 0, 0)$$

— Hallamos el punto $B \in \pi'$, teniendo en cuenta que $P = (1, -1, 1)$ viene a ser el punto medio entre $A = (0, 0, 0)$ y $B = (x, y, z)$:

$$P = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) = (1, -1, 1)$$

$$\frac{x}{2} = 1 \longrightarrow x = 2, \qquad \frac{y}{2} = -1 \longrightarrow y = -2, \qquad \frac{z}{2} = 1 \longrightarrow z = 2$$

Por lo que el punto $B$ es:

$$B = (2, -2, 2)$$

— Sustituimos las coordenadas del punto $B$ en la ecuación del plano $\pi'$:

$$\pi' = x - y + z + D = 0 \longrightarrow 2 - (-2) + 2 + D = 0 \longrightarrow D = -6$$

Por tanto, el plano $\pi'$ buscado es:

$$\boxed{\pi' = x - y + z - 6 = 0}$$

También podríamos haber calculado el valor de $D$ teniendo en cuenta que la distancia de $\pi$ a $r$ es la misma que la distancia de $\pi'$ a $r$. Por el paralelismo de nuestro problema, la distancia entre $r$ y cada uno de los planos es igual a la distancia entre el punto $P$ a cada uno de dichos planos:

$$\left.\begin{aligned} d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|1-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \\ d(r,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|1-(-1)+1+D|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|3+D|}{\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{|3+D|}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto:

$$3 = |3+D| \longrightarrow \begin{cases} 3 = 3 + D \longrightarrow D = 0 \\ 3 = -(3+D) \longrightarrow D = -6 \end{cases}$$

Cuando $D = 0$ se obtiene el plano $\pi$ dado, por lo que $D = -6$ es el valor que corresponde al plano $\pi'$:

$$\boxed{\pi' = x - y + z - 6 = 0}$$

## Ejercicio B3

**Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.** (2 puntos)

$$f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

*Dominio*. Como $e^x > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{Dom\, f = \mathbb{R}}$$

*Asíntotas*. Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{No posee asíntotas verticales}}$$

Comprobamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Asíntota horizontal } y = 0 \\ \text{cuando } x \longrightarrow +\infty\end{array}} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x \cdot e^x = -\infty \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{No hay asíntota horizontal} \\ \text{cuando } x \longrightarrow -\infty\end{array}} \end{cases}$$

Consideramos la posibilidad de que exista una asíntota oblicua $y = mx + n$ cuando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x/e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{-\infty}} = e^{+\infty} = +\infty \longrightarrow \boxed{\text{No hay asíntota oblicua}}$$

*Intervalos de crecimiento y decrecimiento*. Para determinarlos, evaluamos el signo de la primera derivada de la función a lo largo de su dominio:

$$f'(x) = \frac{e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

La primera derivada se anula cuando $1-x=0$, es decir, cuando $x=1$. Luego nos interesa conocer el signo de $f'(x)$ en $(-\infty,1)$ y $(1,+\infty)$:

| $(-\infty,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|
| $f'(x)>0$ | $f'(x)<0$ |
| Creciente | Decreciente |

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) \text{ crece en } (-\infty,1) \text{ y decrece en } (1,+\infty)}$$

*Extremos relativos*. El único candidato a extremo relativo es $x=1$, ya que $f'(1)=0$. Después de estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función, queda claro que para ese valor de $x$ la función presenta un máximo.

(*) Esto puede comprobarse al evaluar el signo de la segunda derivada en ese punto:

$$f''(x)=\frac{-e^x-(1-x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{-2+x}{e^x}\longrightarrow f''(1)=\frac{-1}{e}<0 \Longrightarrow \text{Hay un máximo en } x=1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Máximo en } \left(1,\frac{1}{e}\right)}$$

*Concavidad y convexidad*. Evaluamos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-2+x}{e^x}=0\longrightarrow x=2$$

| $(-\infty,2)$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|
| $f''(x)<0$ | $f''(x)>0$ |
| Cóncava $(\cap)$ | Convexa $(\cup)$ |

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) \text{ es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty,2) \text{ y convexa } (\cup) \text{ en } (2,+\infty)}$$

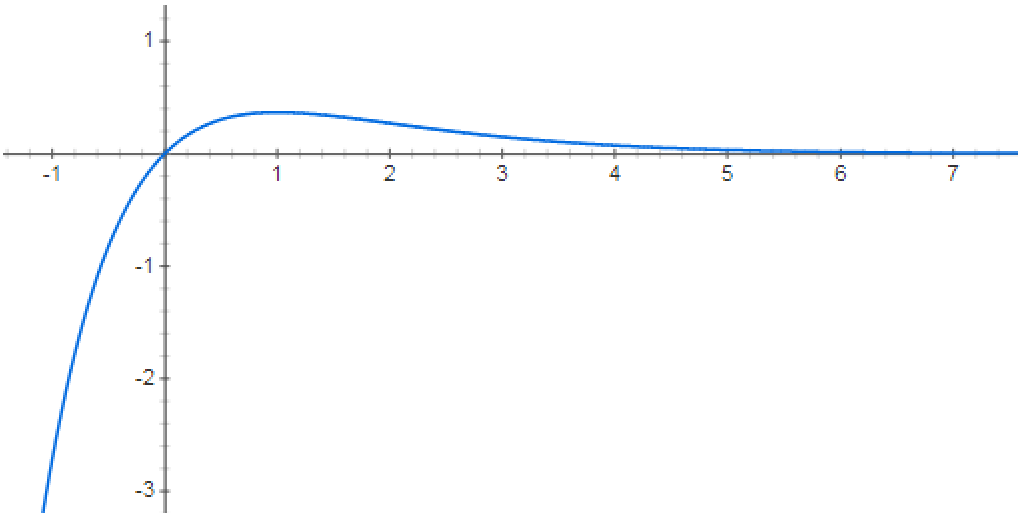
*Puntos de inflexión*. Hay un cambio de curvatura cuando $x=2$, luego:

$$\boxed{\text{Punto de inflexión es } \left(2,\frac{2}{e^2}\right)}$$

(*) Podemos comprobar que, efectivamente, en $x=2$ hay un punto de inflexión, aplicando el criterio de la tercera derivada:

$$f'''(x)=\frac{e^x-(-2+x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{3-x}{e^x}\longrightarrow f'''(2)=\frac{1}{e^2}\neq 0 \Longrightarrow \text{Hay un punto de inflexión en } x=2$$

*Gráfica*. A partir del estudio de la función:




## Ejercicio B4

**a) Calcular:** (1 punto)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \xRightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

**b) Calcular:** (1 punto)

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot dx \xRightarrow[\text{}]{\substack{\text{Cambio de variable} \\ t=\ln x \to dt=\frac{dx}{x}}} \int t^2 \cdot dt = \frac{t^3}{3} + C \longrightarrow \boxed{\frac{\ln^3 x}{3} + C}$$

## Ejercicio B5

**La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.** (2 puntos)

La variable aleatoria IMC sigue una distribución normal de media $\mu = 26$ y desviación típica $\sigma = 6$:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \longrightarrow \text{IMC} \sim N(26, 6)$$

Para calcular la probabilidad $P(\text{IMC} > 35)$, tipificamos la variable:

$$P(\text{IMC} > 35) = P\left(Z > \frac{35-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{35-26}{6}\right) = P\left(Z > \frac{9}{6}\right) = P(Z > 1{,}5)$$

Teniendo en cuenta que $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$, y consultando la tabla:

$$P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$$

$$\boxed{P(\text{IMC} > 35) = 0{,}0668 \longrightarrow 6{,}68\ \%}$$