Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.
[1 punto]

2. Considere los planos π_1: $5x - y - 7z = 1$ y π_2: $2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.
[1 punto]

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.
[1 punto]

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro k:

a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función.
[1 punto]

b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.
[1 punto]

4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Compruebe que $a \neq 0$.
[1 punto]

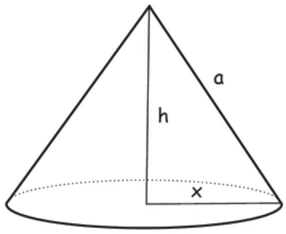
b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro a.
[1 punto]

5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

a) Compruebe que la matriz $\boldsymbol{M}$ es siempre invertible, independientemente de los valores de x y de y.
[1 punto]

b) Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule $\boldsymbol{M}^{-1}$.
[1 punto]

6. Considere un cono de $120\ \text{cm}^3$ de volumen que tiene una altura h, un radio de la base x y una arista a, como el de la siguiente figura:



a) Compruebe que $a^2 = \dfrac{360}{\pi} \cdot \dfrac{1}{h} + h^2$.
[1 punto]

b) Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.
[1 punto]

NOTA: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sean las rectas de $\mathbb{R}^3$ $r\colon \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ y $s\colon\ x + 1 = \dfrac{y-2}{2} = z - 1$.

a) Compruebe que son paralelas.
[1 punto]

b) Calcule la ecuación vectorial del plano que las contiene.
[1 punto]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + kz = 1 \\ x + (k+1)y + z = k^2 - 4 \end{cases}$$

en el que k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de k.
[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $k = -2$.
[1 punto]

3. Responda a las siguientes cuestiones:

a) Compruebe que la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ es la recta $y = 4x - 4$ y calcule los puntos de intersección de esta recta con los ejes de coordenadas.
[1 punto]

b) Calcule el área limitada por la curva del apartado anterior, la recta tangente en $x = 2$ y el eje de abscisas.
[1 punto]

4. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ y $\boldsymbol{A}^6$.

[1 punto]

b) Calcule la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}^5$.

[1 punto]

5. Sea $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

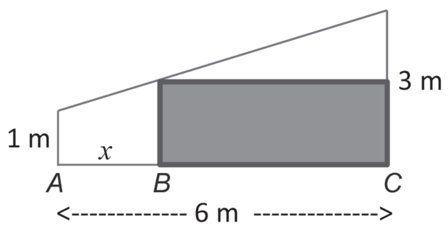
a) Discuta el sistema según los valores del parámetro a, e interprete el resultado geométricamente.

[1 punto]

b) Para $a = 1$ encuentre la forma paramétrica del plano solución y dé un punto y dos vectores directores de este plano.

[1 punto]

6. El croquis de debajo representa la pared de un desván con el techo inclinado, en la que se quiere construir un armario rectangular como el de la zona sombreada.



a) Exprese el área del rectángulo en función de la longitud x del segmento AB.

[1 punto]

b) Determine las dimensiones del rectángulo si se quiere que tenga una superficie máxima y calcule esta superficie máxima.

[1 punto]