Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sean las matrices $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{N}$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.
[1 punto]

b) Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{M}$ es invertible.
[1 punto]

2. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r.
[1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos π_1: $x + y = -2$ y π_2: $x - z = 1$.
[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.
[1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.
[1 punto]

4. Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta r: $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r.

[1 punto]

b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P, Q y R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

[1 punto]

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

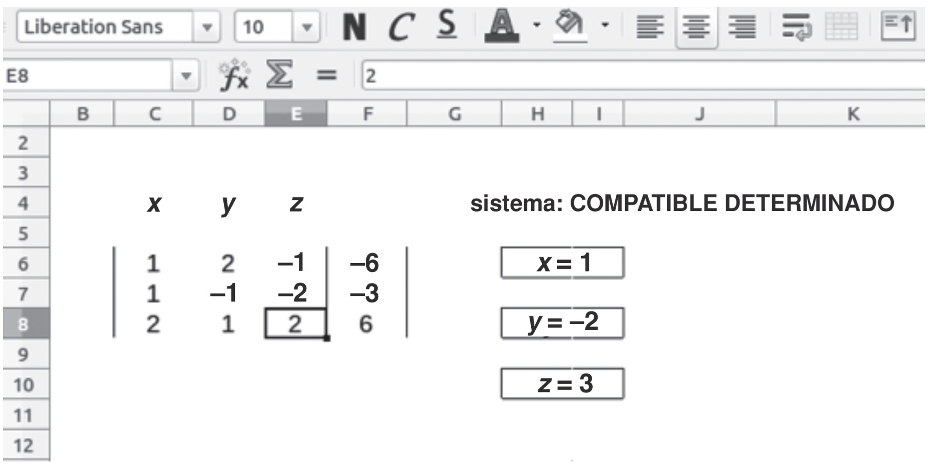
a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

[1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

[1 punto]

6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:



a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.

[1 punto]

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?

[1 punto]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=m \end{cases}$, para $m \in \mathbb{R}$.

a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

[1 punto]

2. Sean el plano de ecuación π: $x+y-z=0$ y el punto $P=(2,3,2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

[1 punto]

b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax+By+Cz=D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Sea la función $f(x)=a\cdot e^{-x^2+bx}$, con $a\neq 0$ y $b\neq 0$.

a) Calcule los valores de a y de b para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto $(1, e)$.

[1 punto]

b) Para el caso $a=3$ y $b=5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

[1 punto]

4. Se sabe que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

***a*)** Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

[1 punto]

***b*)** Calcule $\int_{-3}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

[1 punto]

5. Sean las rectas $r_1\colon x-1=\dfrac{y-2}{-1}=z-5$ y $r_2\colon (x, y, z) = (2-3\lambda, -1+\lambda, 2)$.

***a*)** Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2.

[1 punto]

***b*)** Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2. Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2.

[1 punto]

6. Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

***a*)** Si $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la matriz $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{I}$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$.

[1 punto]

***b*)** Calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que satisface la ecuación $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = 2 \cdot \boldsymbol{X}$, donde $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ es la matriz transpuesta de la matriz $\boldsymbol{A}$.

[1 punto]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés