Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 3

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros a, b y c, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

[1 punto]

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

[1 punto]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$.

[1 punto]

3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (-1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.

[1 punto]

b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Sea la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

a) ¿Existe algún valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{A}$ no tenga inversa para este valor?

[1 punto]

b) Calcule la matriz inversa de $\boldsymbol{A}^2$ para $\alpha = 0$.

[1 punto]

5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta r: $x = y - 1 = \dfrac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A, B y C.

[1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de 2u^3.

[1 punto]

NOTA: El volumen de un tetraedro de vértices P, Q, R y S puede calcularse con la expresión $\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS})\right|$.

6. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) Esboce las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.

[1 punto]

b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

[1 punto]