Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2019

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Las páginas de un libro deben de tener 600 cm^2 de superficie cada una, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permite la superficie impresa más grande posible.

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro k:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ x+k^2y+3z&=2k\\ 3x+7y+7z&=k-3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para el caso de k = –1.

3. Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

b) Encuentra las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

4. Considera la función:

$$f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$$

a) Calcula el dominio y estudia la continuidad de *f*. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2)=\frac{-2}{3}$, $f(0)=4$ y $f(2)=-10$. Razona si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (–2,0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo (0,2)? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

5. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$, donde I es la matriz identidad y = es la matriz nula, ambas de orden 2.
b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresión general para calcular la matriz inversa de M y, a continuación, calcula la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

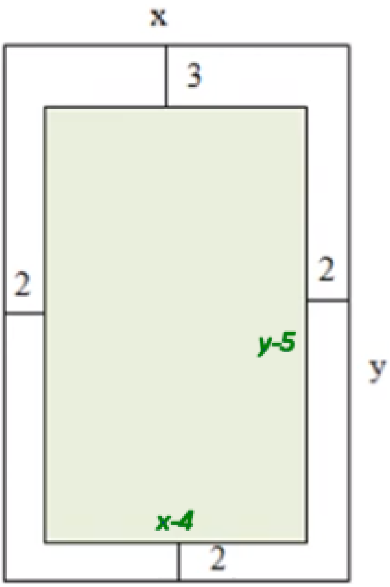
6. Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcula el punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

SOLUCIONES

1. Las páginas de un libro deben de tener 600 cm^2 de superficie cada una, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permite la superficie impresa más grande posible.

Realicemos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



La zona sombreada es la destinada a escribir. Es la que debemos maximizar.

Función objetivo: $f(x,y)=(x-4)(y-5)$.

Las condiciones son:

$$x\cdot y=600 \Rightarrow y=\frac{600}{x}$$

La función queda

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=(x-4)(y-5) \\ y=\dfrac{600}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=(x-4)\left(\frac{600}{x}-5\right)=x\cdot\frac{600}{x}-5x-4\cdot\frac{600}{x}+20$$

$$f(x)=600-5x-\frac{2400}{x}+20$$

$$f(x)=620-5x-\frac{2400}{x}$$

Para maximizar esta función la derivamos e igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos.

$$f(x)=620-5x-\frac{2400}{x} \Rightarrow f'(x)=-5+\frac{2400}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -5+\frac{2400}{x^2}=0 \Rightarrow -5x^2+2400=0$$

$$5x^2=2400 \Rightarrow x^2=\frac{2400}{5}=480 \Rightarrow x=\sqrt{480}=21{,}9...$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de este valor 21,9.

En $\left(0,\sqrt{480}\right)$ tomamos el valor 1 y la derivada vale $f\,'(1)=-5+\frac{2400}{1^2}=2395>0$. La función crece en este intervalo.

En $\left(\sqrt{480},+\infty\right)$ tomamos el valor 30 y la derivada vale $f\,'(30)=-5+\frac{2400}{30^2}=-2,3<0$. La función decrece en este intervalo.

La función presenta un máximo en $x=\sqrt{480}$.

Las dimensiones que maximizan la zona impresa son $x=\sqrt{480}\simeq 21,9\,cm$ e $y=\frac{600}{\sqrt{480}}\simeq 27,38$

2. Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro k:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelve el sistema para el caso de k = –1.

a) La discusión del sistema parte del estudio del valor del determinante de la matriz de los coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=7k^2+27+14-6k^2-21-21=k^2-1$$

Si igualamos a cero

$$|A|=0\Rightarrow k^2-1=0\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\sqrt{1}=\pm 1$$

Hay tres casos a considerar.

CASO 1. $k\neq -1$ y $k\neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $k=-1$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \\ 3x+7y+7z=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & +y & +3z & =-2 \\ -x & -3y & -2z & =1 \\ \hline & -2y & +z & =-1 \end{array} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 3}\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 3x & +7y & +7z & =-4 \\ -3x & -9y & -6z & =3 \\ \hline & -2y & +z & =-1 \end{array} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ -2y+z&=-1\\ -2y+z&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª es igual a ecuación 3ª}\\ \text{Podemos eliminar la 3ª}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ -2y+z&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=-1-3y\\ \boxed{z=-1+2y}\end{array}\right\} \Rightarrow x+2(-1+2y)=-1-3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2+4y=-1-3y \Rightarrow \boxed{x=1-7y}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

La solución es $x=1-7t;\ y=t;\ z=-1+2t$.

CASO 3. $k=1$

El sistema queda

$$\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ x+y+3z&=2\\ 3x+7y+7z&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +3z & =2\\ -x & -3y & -2z & =1\\ \hline & -2y & +z & =3\end{array}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª - 3 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr} 3x & +7y & +7z & =-1\\ -3x & -9y & -6z & =3\\ \hline & -2y & +z & =2\end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ -2y+z&=3\\ -2y+z&=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrr} -2y & +z & =2\\ 2y & -z & =-3\\ \hline & 0 & =-1\end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+3y+2z&=-1\\ -2y+z&=3\\ 0&=-1\end{aligned}\right\}$$

Este sistema es incompatible.

b) La solución se ha obtenido en el apartado anterior y es $x=1-7t;\ y=t;\ z=-1+2t$

3. Un dron se encuentra en el punto $P=(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

b) Encuentra las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

a) Se habla de proyectar ortogonalmente el punto P sobre el plano. La recta se obtiene a partir de su vector director (el vector normal del plano) y sabiendo que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{n}=(3,0,4)\\ \text{Pasa por } P(2,-3,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\left.\begin{aligned} x&=2+3t\\ y&=-3\\ z&=1+4t\end{aligned}\right\}}$$

La distancia del punto $P=(2,-3,1)$ al plano $\pi: 3x+4z+15=0$ se calcula con la fórmula:

$$\text{Distancia}(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1+15|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{25}{5}=\boxed{5\ u}$$

b) Hay que hallar el punto de corte de la recta hallada en el apartado anterior y el plano. Resolvamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 3x+4z+15=0 \\ r:\left.\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=-3 \\ z=1+4t\end{array}\right\}\end{array}\right\} \Rightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+15=0 \Rightarrow 6+9t+4+16t+15=0$$

$$25t+25=0 \Rightarrow t=\frac{-25}{25}=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-3=-1 \\ y=-3 \\ z=1-4=-3\end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto pedido es P´(–1,–3,–3)

4. Considera la función:

$$f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$$

a) Calcula el dominio y estudia la continuidad de *f*. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2)=\frac{-2}{3}$, $f(0)=4$ y $f(2)=-10$. Razona si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (–2,0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo (0,2)? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

a) El dominio de la función al ser una fracción es Dominio$=\mathbb{R}-\{1\}$. Para la continuidad es continua en todo el dominio.
La asíntota vertical es $x=1$ lo comprobamos calculando el límite

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x+4}{1-x}=\frac{2-5+4}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

b) $f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$ es continua en (–2,0) y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(-2)=\frac{-2}{3}<0$, $f(0)=4>0$, luego existe un valor $c\in(-2,0)$ donde $f(\text{c})=0$.

$f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$ es continua en (0,2) y la función cambia de signo de un extremo a otro del intervalo $f(0)=4>0$ y $f(2)=-10<0$ luego existe un valor $c\in(0,2)$ donde $f(\text{c})=0$.

El intervalo (–2,–1) cumple que $f(-2)=\frac{-2}{3}<0$ y $f(-1)=\frac{-2+5+4}{1+1}=\frac{7}{2}>0$ luego existe un valor $c\in(-2,-1)$ donde $f(\text{c})=0$

5. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & a \\ a & 0\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2-M-2I=0$, donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula, ambas de orden 2.

b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresión general para calcular la matriz inversa de M y, a continuación, calcula la inversa de M para el caso de $a=\sqrt{2}$.

a)

$$M^2-M-2I=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+a^2 & a\\ a & a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+a^2-1-2 & a-a\\ a-a & a^2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$a^2-2=0$$

$$a^2=2$$

$$\boxed{a=\pm\sqrt{2}}$$

b)

$$M^2-M-2I=0 \Rightarrow M^2-M=2I \Rightarrow M(M-I)=2I \Rightarrow M\left(\frac{M-I}{2}\right)=I$$

$$M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)$$

Si M cumple la ecuación $M^2-M-2I=0$ su inversa es $M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)$

Si $a=\sqrt{2}$ la inversa de M es $M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)$

$$M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

6. Considera las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\frac{1}{x}$, y la recta $x=e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcula el punto de corte de $y=f(x)$ con $y=g(x)$.

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

a) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas.

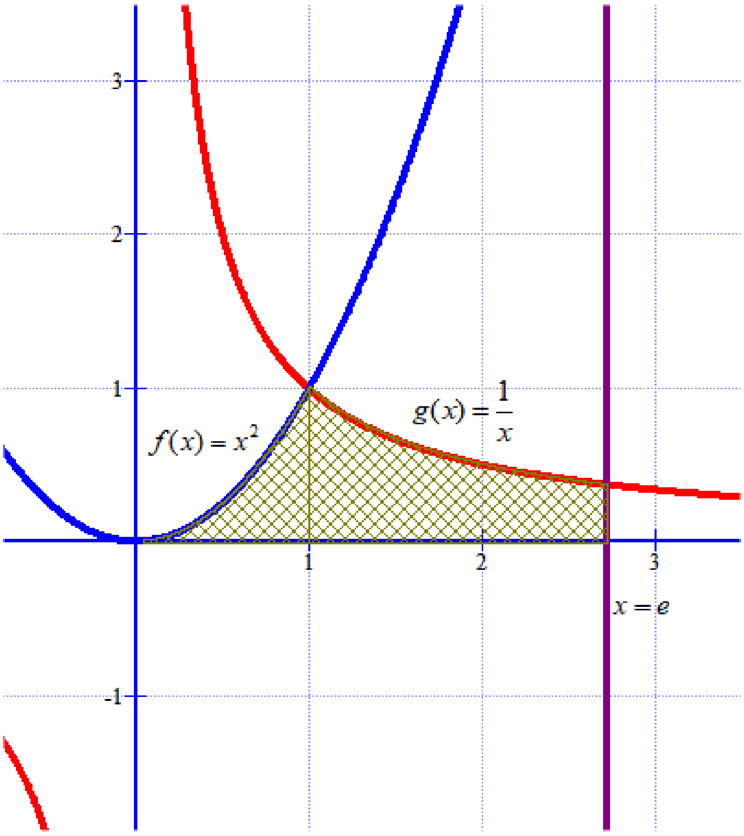
$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{1}{x}=x^2 \Rightarrow 1=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$$

Hacemos una tabla de valores para cada función.

x	$y=\frac{1}{x}$
-1	-1
1	1
2	$0,5$
4	$0,25$
8	$0,125$

x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4
4	16

y la región es



b) El área pedida es una integral definida.

$$\acute{A}rea=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\ln x\right]_1^e=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}+\ln e-\ln 1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}u^2$$