Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatòria 2019

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considera las rectas $y = x$ *e* $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

***a*)** Calcule los puntos de intersección entre les gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada per las gráficas.
[1 punto]

***b*)** Calcule el área de la región del apartado anterior.
[1 punto]

2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

***a*)** Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible.
[1 punto]

***b*)** Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 : x + ay + z = 1$ y $\pi_3 : 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a.
[1 punto]

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

***a*)** Calcula $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.
[1 punto]

***b*)** Justifica que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero.

4. Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

***a*)** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]

***b*)** Calcula las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]

5. Dados P, Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z = 4$ con los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.

***a*)** Calcule los puntos P, Q *y* R, y el perímetro del triángulo de vértices P, Q *y* R.
[1 punto]

***b*)** Calcule el área del triángulo de vértices P, Q *y* R.
[1 punto]

Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores ***v*** y ***w*** puede utilizar la expresión $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, donde $v \times w$ es el producto vectorial de los vectores ***v*** y ***w***.

6. Considera la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

***a*)** Calcula el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
[1 punto]

***b*)** Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considera las rectas $y = x$ *e* $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

a) Calcule los puntos de intersección entre les gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada per las gráficas.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del apartado anterior.
[1 punto]

a) Resolvamos el sistema formado por cada par de funciones obteniendo dichos puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x=2x \Rightarrow 0=x \Rightarrow y=0 \quad P(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to y=0 \\ x=1 \to y=1 \end{cases} \quad P(0,0)\ y\ Q(1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=2x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to y=0 \\ x=2 \to y=4 \end{cases} \quad P(0,0)\ y\ R(2,4)$$

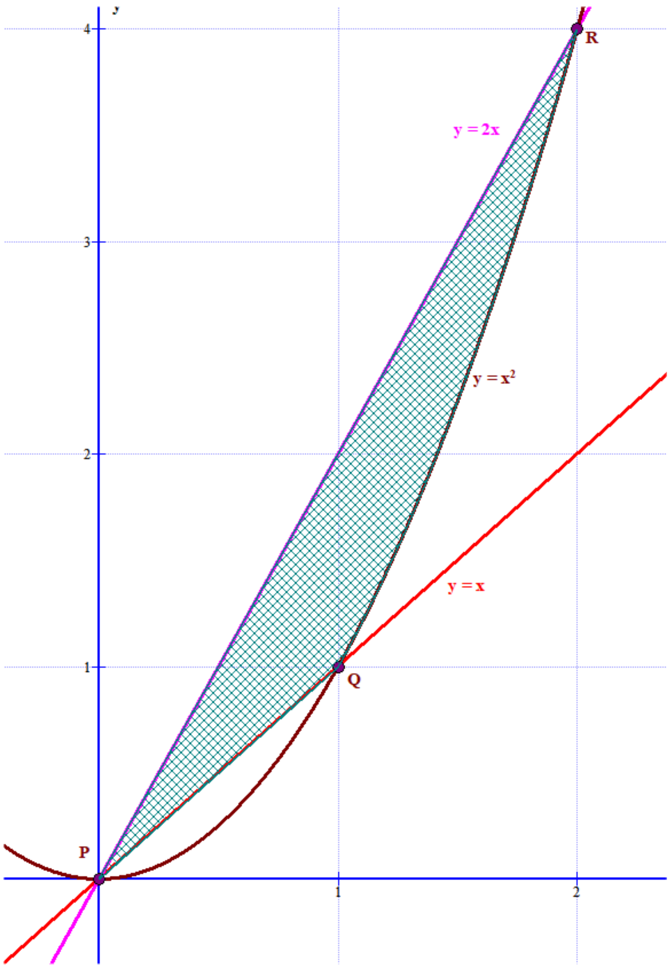
Los puntos son $P(0,0)$; $Q(1,1)\ y\ R(2,4)$

Para dibujar las gráficas obtenemos una tabla para cada una de ellas:

x	$y=x$
0	0
1	1
2	2
-1	-1

x	$y=2x$
0	0
1	2
2	4
-1	-2

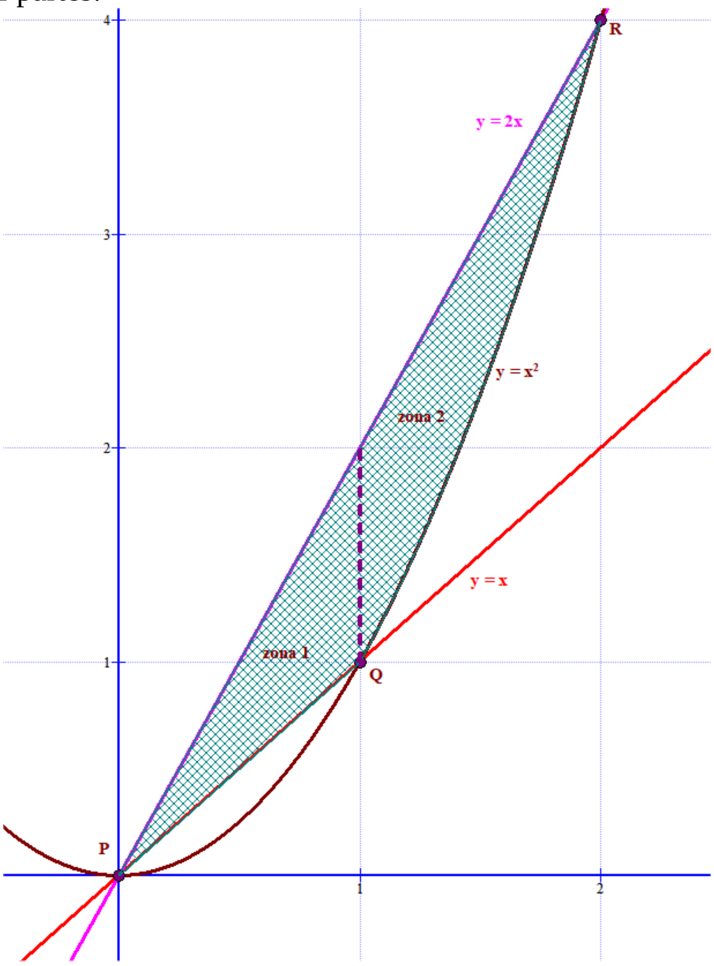
x	$y=x^2$
0	0
1	1
2	4
-1	1



b) Observando el dibujo el área debe ser aproximadamente 1 u^2.

Calculemos su valor exacto haciendo uso de integrales.

La dividimos en 2 partes:



Entre x = 0 y x = 1

$$\acute{a}rea\,1 = \int_0^1 2x - x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2}u^2$$

Entre x = 1 y x = 2

$$\acute{a}rea\,2 = \int_1^2 2x - x^2 dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[2^2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[1^2 - \frac{1^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}u^2$$

El área total es la suma de las dos: $\boxed{\acute{A}rea = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} = 1{,}17\,u^2}$

2. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentra los valores del parámetro a para el que la matriz es invertible.
[1 punto]

b) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: x+(a-1)z=0$, $\pi_2: x+ay+z=1$ y $\pi_3: 4x+3ay+z=3$ en función de los valores del parámetro a.
[1 punto]

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo. Averigüemos cuando ocurre esto.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{vmatrix}=a+3a^2-3a-4a^2+4a-3a=-a^2-a$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2-a=0\Rightarrow -a(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ o\\ a=-1\end{cases}$$

A es invertible si el parámetro a es distinto de 0 y de –1.

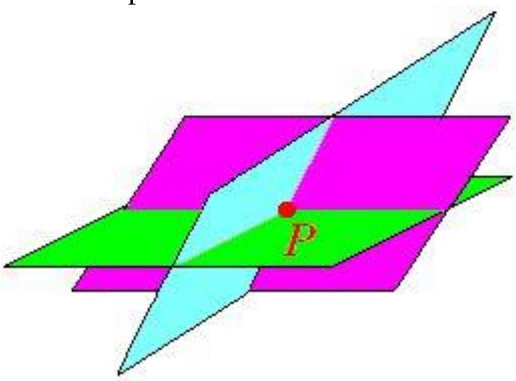
b) Para discutir la posición relativa de los planos nos planteamos el sistema formado por las 3 ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}x+(a-1)z=0\\ x+ay+z=1\\ 4x+3ay+z=3\end{array}\right\}\text{ con matriz de coeficientes } A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}.$$

Hemos calculado su determinante y averiguado cuando se anula en el apartado anterior.
Se nos plantean tres posibilidades:

CASO 1. $a\neq 0\ y\ a\neq -1$

En este caso el sistema tiene una única solución. Esta solución es el punto de corte de los 3 planos. Los 3 planos se cortan en un punto.

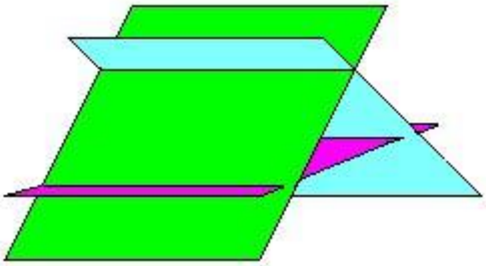


CASO 2. $a=0$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l}x-z=0\\ x+z=1\\ 4x+z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=z\\ x+z=1\\ 4x+z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}z+z=1\\ 4z+z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2z=1\\ 5z=3\end{array}\right\}$$

Este caso no tiene solución. Y observando los vectores normales, no son paralelos dos a dos los planos (no son proporcionales los vectores normales). Son planos que se cortan dos a dos.



CASO 3. $a=-1$

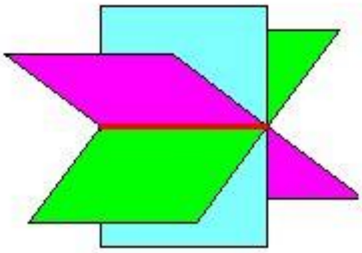
El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x-2z=0 \\ x-y+z=1 \\ 4x-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2z \\ x-y+z=1 \\ 4x-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z-y+z=1 \\ 8z-3y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y+3z=1 \\ -3y+9z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Las dos ecuaciones son iguales}\} \Rightarrow -y+3z=1 \Rightarrow y=3z-1$$

$$\text{La solución es } \left.\begin{array}{l} x=2t \\ y=-1+3t \\ z=t \end{array}\right\}$$

Este caso tiene infinitas soluciones, que forman una recta. Los planos se cortan en una recta.



3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

***a*)** Calcula $\boldsymbol{A\cdot B}$ y $\boldsymbol{B\cdot A}$.
[1 punto]
***b*)** Justifica que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene como resultado la matriz nula, entonces el determinante de alguna de las dos matrices ha de ser cero.

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2 & 2-2\\ -6+6 & -6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & -1+3\\ 4-12 & -2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -8 & 4\end{pmatrix}$$

b) Si $A\cdot B=0$ si tomamos determinantes

$$|A\cdot B|=|0|\Rightarrow |A|\cdot|B|=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\\ o\\ |B|=0\end{cases}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que alguna de ellas, por ejemplo, A tiene determinante no nulo, entonces tiene inversa A^{-1}.
En la igualdad $A\cdot B=0$ podemos multiplicar por la matriz inversa A^{-1} obteniendo:
$A\cdot B=0\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot 0\Rightarrow I\cdot B=0\Rightarrow B=0$ y por lo tanto el determinante de B es nulo.

4. Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]

b) Calcula las coordenadas del punto de la gráfica de la función *f*(*x*) en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]

a) La ecuación de la recta tangente a *f(x)* en x = a es:

$$y-f(a)=f\,'(a)\left(x-a\right)$$

Siendo $f\,'(a)$ la pendiente de la recta tangente. Como nos piden que sea horizontal, la pendiente debe ser cero → $f\,'(a)=0$

Resolvamos esta situación:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Rightarrow-2x=0\Rightarrow x=0$$

El valor de a es 0. Calculemos la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1 \\ f\,'(0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-1=0\left(x-0\right)\Rightarrow\boxed{y=1}$$

b) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada. Para que esta derivada tenga un valor máximo, debe de ser su derivada nula, es decir, la derivada segunda de la función inicial debe ser cero.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-\left(-2x\right)2\cdot2x\left(1+x^2\right)}{\left(\left(1+x^2\right)^2\right)^2}$$

$$f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2+8x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{\cancel{\left(1+x^2\right)}\left[-2\left(1+x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$f\,''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Si igualamos a cero

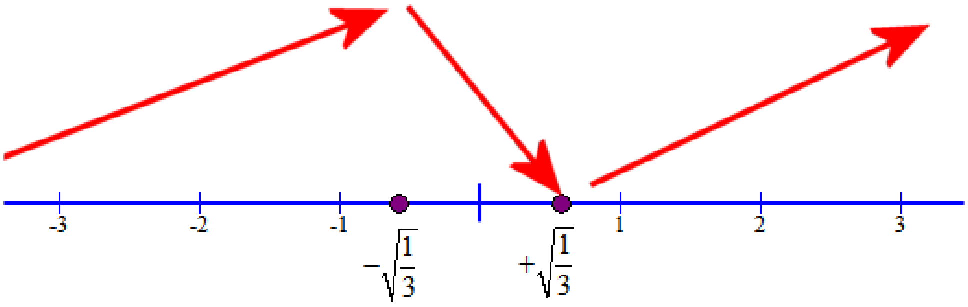
$$f\,''(x)=0\Rightarrow\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\Rightarrow-2+6x^2=0\Rightarrow6x^2=2\Rightarrow x^2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

Veamos cómo evoluciona la derivada valorando el signo de la derivada segunda.

En $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos x = –1 la derivada segunda vale $f''(-1)=\frac{-2+6}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0$. La derivada crece.

En $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ tomamos x = 0 la derivada segunda vale $f''(0)=\frac{-2}{(1+0)^3}=-2<0$. La derivada decrece.

En $\left(+\sqrt{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ tomamos x = 1 la derivada segunda vale $f''(1)=\frac{-2+6}{(1+1)^3}=\frac{4}{8}>0$. La derivada crece.



Por lo tanto, la derivada alcanza un valor máximo en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Su imagen es $f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{1+\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$

El punto de la gráfica de la función donde la pendiente de la recta tangente es máxima es en el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$.

5. Dados P, Q y R los puntos de intersección del plano de ecuación $x+4y+2z=4$ con los tres ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.
a) Calcule los puntos P, Q y R, y el perímetro del triángulo de vértices P, Q y R.
[1 punto]
b) Calcule el área del triángulo de vértices P, Q y R.
[1 punto]
Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ puede utilizar la expresión $S=\frac{1}{2}\|v\times w\|$, donde $v\times w$ es el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

a)

La ecuación del eje OX es $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$, del eje OY es $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$ y del eje OZ es $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$

Planteamos los sistemas de ecuaciones y los resolvemos:

Corte con eje OX:

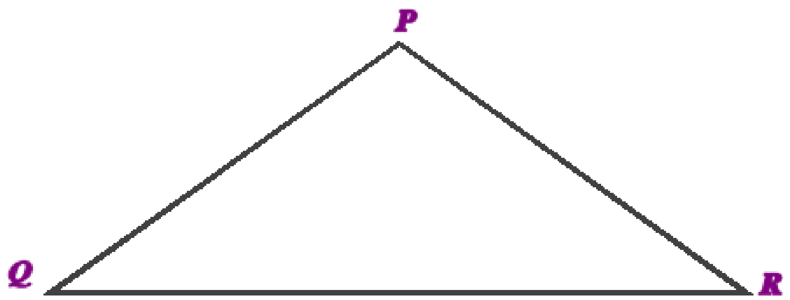
$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ x+4y+2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4 \text{ El punto es P(4,0,0)}$$

Corte con eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \\ x+4y+2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow y=1 \text{ El punto es Q(0,1,0)}$$

Corte con eje OZ:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+4y+2z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=4 \Rightarrow z=2 \text{ El punto es R(0,0,2)}$$



El perímetro es el módulo del vector que une cada par de vértices.

$$\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)-(4,0,0)=(-4,1,0)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$
$$\overrightarrow{PR}=(0,0,2)-(4,0,0)=(-4,0,2)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{PR}\right\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$
$$\overrightarrow{QR}=(0,0,2)-(0,1,0)=(0,-1,2)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

El perímetro es $\sqrt{17}+\sqrt{20}+\sqrt{5}=\boxed{10,83\,u}$

b) Consideremos los vectores $\overrightarrow{PQ}=(-4,1,0)$ y $\overrightarrow{PR}=(-4,0,2)$.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2i+4k+8j=2i+8j+4k=(2,8,4)$$

$$\left\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{4+64+16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

Área del triángulo PQR $=\dfrac{\left\|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}\right\|}{2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{2}=\boxed{\sqrt{21}\,u^2}$

6. Considera la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calcula el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x=1$ y $x=e$, y el eje de abscisas.
[1 punto]

a) - El dominio de la función son todos los reales excepto x = 0. Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

- Si x = 0 → No existe $f(0)=\dfrac{\ln(0)}{0}$

Si y = 0 → $\dfrac{\ln(x)}{x}=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=e^0=1$

El único punto de corte de la gráfica y los ejes es P(1,0)

- Calculamos la derivada de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

$$f\,'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Si la igualamos a cero.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$$

Este es el único punto crítico de la función. Estudiemos como cambia el signo de la derivada antes y después del punto.

En $(-\infty,e)$ tomamos x = 1 la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{1^2}=1>0$. La función crece.

En $(e,+\infty)$ tomamos x = 5 la derivada vale $f\,'(5)=\dfrac{1-\ln(5)}{5^2}=-0,02<0$. La función decrece.

Resumiendo, la función crece en $(-\infty,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.

b) Hemos visto que la función solo corta al eje de abscisas en x = 1. Como el área es de 1 a e no influye en el cálculo del área con el uso de integrales definidas.

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\to\frac{1}{x}dx=dt\to dx=xdt\end{matrix}\right\}=\int\frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$Área=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln e)^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln 1)^2}{2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$$