OPCION A

1.- a) Calcule el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$ **(0'5 puntos)**

b) Obtenga el determinante de la matriz $B=\frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente **B (0'5 puntos)**

c) Calcule la matriz inversa de **A (0'5 puntos)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\3&0&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\3&0\end{vmatrix}=1\cdot 3=3$$

$b)$

$$|B|=\frac{1}{3}\cdot\left|A^4\right|=\frac{1}{3}\cdot|A|^4=\frac{1}{3}\cdot 3^4=3^3=27$$

c) Tiene inversa una matriz cuando su determinante no es nulo

$$|A|=3\neq 0\Rightarrow Exiiste\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-3&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-3&0\\2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&-1&0\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2.- Considere en **R³** las rectas $r:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $s:\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases}$

(a) **(0'5 puntos)** Obtenga un vector director de la recta *s*.

(b) **(1 punto)** Obtenga el plano π_1 que contiene a **r** y es paralelo a **s**.

(c) **(1 punto)** Obtenga el plano π_2 que contiene a **r** y es perpendicular a

s $s:\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow x=1-y\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)$

b) El plano π_1 contiene los vectores directores de las rectas **r** y **s** y el vector RG, siendo R un punto cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y G un punto generador del plano pedido; estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y su producto mixto , al serlo el volumen del paralelepípedo que forman, nulo y la ecuación pedida del plano.

$$Siendo\ R(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(0,0,1)\\\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)\\\overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(0,0,0)=(x,y,z)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x&y&z\\0&0&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-y-x\Rightarrow\pi\equiv x+y=0$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

c) El plano π_2 tiene como vector director el de la recta s, que es perpendicular al vector RG, definido en el apartado anterior, y su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\text{Siendo } R(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \overrightarrow{v_s} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{RG} = (x,y,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{RG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{RG} = 0 \Rightarrow (-1,1,0)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow -x+y=0$$

$$\pi_2 \equiv x - y = 0$$

3.- (a) **(0,75 puntos)** Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange.*

(b) **(1'25 puntos)** Aplicando la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números **1 < a < b** se cumple la desigualdad $a+b < 2a^2b^2$

a)

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto c $\in$ (a,b) tal que: f(b) – f(a) = f '(c)·(b – a) ó $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, con c $\in$ (a,b).

b)

Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto c $\in$ (a,b) tal que: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, con c $\in$ (a,b).

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{b-a} = \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2\cdot b^2}}{b-a} = \frac{(a-b)\cdot(a+b)}{a^2\cdot b^2\cdot(-1)\cdot(a-b)} = -\frac{a+b}{a^2\cdot b^2}.$$

De $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ tenemos $f'(x) = \dfrac{-2x}{x^4} = -\dfrac{2}{x^3}$, por tanto $f'(c) = -\dfrac{2}{c^3}$.

De $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ tenemos $-\dfrac{a+b}{a^2\cdot b^2} = -\dfrac{2}{c^3}$, es decir $\dfrac{a+b}{a^2\cdot b^2} = \dfrac{2}{c^3}$, como c $\in$ (a,b) y 1 < a < b , tenemos que c > 1 por tanto $\dfrac{2}{c^3} < 2$, al ser c > 1.

Juntándolo todo tenemos: $\dfrac{a+b}{a^2\cdot b^2} = \dfrac{2}{c^3} < 2$, es decir $\dfrac{a+b}{a^2\cdot b^2} < 2$, de donde **a + b < 2·a²·b².**

4.- Calcule una primitiva **F(x)** de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cos\left(x^2\right)$ que cumpla **F(0) = 0**

(2 puntos)

$$F(x) = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int e^{-x}dx + \int 2x\cos\left(x^2\right)dx = \int \frac{dt}{t} + \int e^u du + \int \cos(v)\,dv = \ln(t) + e^u - sen(v)$$

$$x^2+1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \quad -x = u \Rightarrow -dx = du \Rightarrow dx = -du \quad x^2 = v \Rightarrow 2x\,dx = dv$$

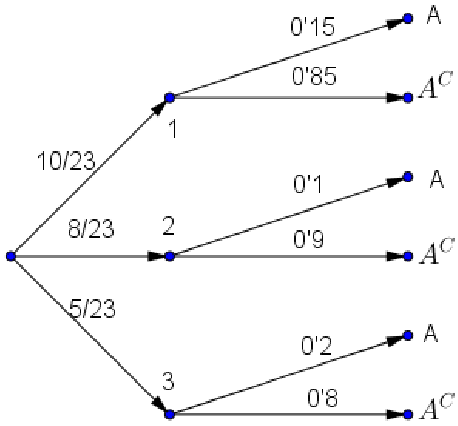
$$F(x) = \ln\left(x^2+1\right) + e^{-x} - sen\left(x^2\right) + K \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow \ln\left(0^2+1\right) + e^{-0} - sen\left(0^2\right) + K = 0 \Rightarrow$$

$$\ln(1) + 1 - sen(0) + K = 0 \Rightarrow 0 + 1 - 0 + K = 0 \Rightarrow K = -1 \Rightarrow F(x) = \ln\left(x^2+1\right) + e^{-x} - sen\left(x^2\right) - 1$$

5.- En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contiene errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error; y en el tercero, de 50 páginas, el 80% no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores
(1 punto)

Sean los sucesos 1 = "capítulo 1", 2 = "capítulo 2", 3 = "capítulo 3", A = "hay errores" y A^C = "no hay errores"
Nos dan p(1) = 100/(100+80+50) = 100/230 = 10/23; p(2) = 80/230 = 8/23; p(3) = 50/230 = 5/23;
p(1/A) = 15/100 = 0'15, p(2/A) = 8/80 = 0'1; p(3/A^C) = 80% = 0'8, ….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores) =**
= **p(página del capítulo uno y no tenga errores) + p(página del capítulo tres y no tenga errores) =**
= p(1$\cap$$A^C$) + p(3$\cap$$A^C$) = p(1)·p($A^C$/1) + p(3)·p($A^C$/3) = (10/23)·(0'85) + (5/23)·(0'8) **= 25/46 $\cong$ 0'5435.**

Opción B

1.- Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \\ ax+by+cz=1 \end{cases}$

a) Obtenga valores de los parámetros **a** , **b** y **c** en los siguientes casos **(0,75 puntos)**
b) Para que el sistema sea compatible indeterminado **(1 punto)**
c) Para que el sistema sea incompatible **(0,75 puntos)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a+c & b & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b \end{vmatrix} = b-(a+c) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow b-(a+c) = 0 \Rightarrow a+c-b=0$$

$$\forall a,b,c \in \Re - \{a+c=b\} \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a+c=b$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ a & b & c & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ a+c & b & 0 & 1+c \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ b & b & 0 & 1+c \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c \end{array}\right) \Rightarrow 1+c=0 \Rightarrow c=-1$$

$$Si\ a+c=b\ y\ c=-1 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow$$
$$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Si\ a+c=b\ y\ c \neq -1 \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

2.- En **R³**, considere los puntos **A = (1 , 2 , 1)**, **B = (-2 , -1 , -3)**, **C = (0 , 1 , -1)** y **D = (0 , 3 , -1),** y sea r la recta que pasa por **A** y **B**
a) Calcule las ecuaciones paramétricas de **r (1 punto)**
b) Obtenga un punto **P** de la recta **r** tal que la distancia de **C** a **P** sea igual a la distancia de **D** a **P**. **(1,5 puntos)**

a) La recta **r** queda definida por el vector **AB**, que es su director, y uno cualquiera de los dos puntos (tomamos el punto **A**)

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-2\,,-1\,,-3)-(1\,,2\,,1) = (-3\,,-3\,,-4) \equiv (3\,,3\,,4) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción A
b) El módulo del vector **CP** (tomando **P** como el punto genérico de la recta **r**) es igual al módulo del vector **DP**.

$$\begin{cases} \overrightarrow{CP}=(1+3\lambda\,,\,2+3\lambda\,,1+4\lambda)-(0\,,1\,,-1)=(1+3\lambda\,,1+3\lambda\,,\,2+4\lambda)\Rightarrow\left|\overrightarrow{CP}\right|=\sqrt{(1+3\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2} \\ \overrightarrow{DP}=(1+3\lambda\,,\,2+3\lambda\,,1+4\lambda)-(0\,,3\,,-1)=(1+3\lambda\,,\,-1+3\lambda\,,\,2+4\lambda)\Rightarrow\left|\overrightarrow{DP}\right|=\sqrt{(1+3\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2} \end{cases}$$

$$\left|\overrightarrow{CP}\right|=\left|\overrightarrow{DP}\right|\Rightarrow\sqrt{(1+3\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2}=\pm\sqrt{(1+3\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2}\Rightarrow$$

$$(1+3\lambda)^2+(1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2=(1+3\lambda)^2+(-1+3\lambda)^2+(2+4\lambda)^2\Rightarrow(1+3\lambda)^2=(-1+3\lambda)^2\Rightarrow$$

$$1+6\lambda+9\lambda^2=1-6\lambda+9\lambda^2\Rightarrow 12\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow P\begin{cases} x=1+3\cdot 0 \\ y=2+3\cdot 0 \\ z=1+4\cdot 0\end{cases}\Rightarrow P=(1\,,2\,,1)$$

3.- Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$$ **(2 puntos)**

$a)$

$$x^2+x=0\Rightarrow(x+1)\,x=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{2\cdot 0+1}{0^2+0}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución \\ x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)+1}{(-1)^2+(-1)}=\dfrac{-2+1}{1-1}=-\dfrac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución\end{cases}\Rightarrow$$

$$Dom\,(f)=\forall x\in\Re-\{-1\,,0\}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow\frac{2x+1}{x^2+x}=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$-3\in(-\infty\,,-1]\Rightarrow f(-3)=\frac{2\cdot(-3)+1}{(-3)^2+(-3)}=\frac{-6+1}{9-3}=-\frac{5}{6}\Rightarrow signo\ negativo$$

$$-\frac{3}{4}\in\left[-1\,,-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{9}{16}-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{12}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\Rightarrow signo\ positivo$$

$$-\frac{1}{4}\in\left[-\frac{1}{2}\,,0\right]\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}\Rightarrow signo\ negativo$$

$$3\in[0\,,\infty)\Rightarrow f(3)=\frac{2\cdot 3+1}{3^2+3}=\frac{7}{12}\Rightarrow signo\ positivo$$

Signo

$-\infty$	**-1**	$-\frac{1}{2}$	**0**	∞

(-)	**(+)**	**(-)**	**(+)**

<u>Asíntotas verticales</u>

x = -1
x = 0

Continuación del Problema 3 de la opción A

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow$$

$$Exixte\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to\infty$$

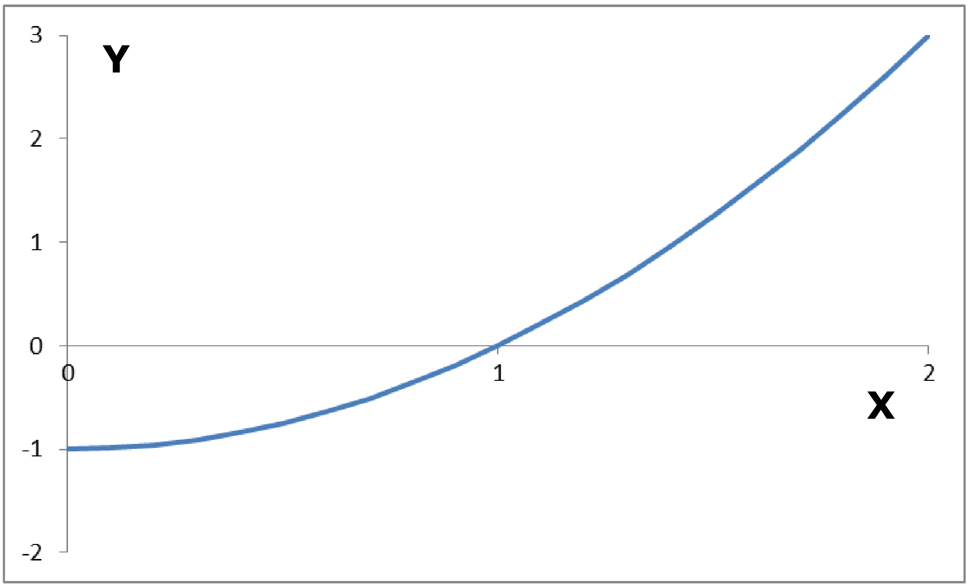
$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{-\infty}-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{-\infty}}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow$$

$$Exixte\ asíntota\ horizontal,\ y=0,\ cuando\ x\to-\infty$$

4.- (a) (0'5 puntos) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$ definida en el intervalo cerrado **[0 , 2]**

(b) (1 punto) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x)=x^2-1$ y las rectas **x = 0** y **x = 2**

a)



b)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow 0=x^2-1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\notin[0\,,2]\Rightarrow No\ es\ solución\\ x=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\in[0\,,1]\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}\Rightarrow Negativo$$

$$\frac{3}{2}\in[1\,,2]\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{9}{4}-1=5\Rightarrow Positivo$$

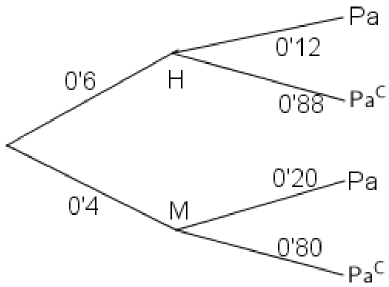
$$A=\left|\int_0^1(x^2-1)\,dx\right|+\int_1^2(x^2-1)\,dx=\int_0^1(-x^2+1)\,dx+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2-\left[x\right]_1^2=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1+\left[x\right]_0^1+\frac{1}{3}\cdot\left(2^3-1^3\right)-(2-1)$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)+(1-0)+\frac{7}{3}-1=-\frac{1}{3}+1+\frac{7}{3}-1=\frac{6}{3}=2\,u^2$$

5.- El 40% de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20% de las mujeres y el 12% de los hombres están en paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer. **(1 punto)**

Sean los sucesos M = "ser mujer", H = "ser hombre", Pa = "estar en el paro" y Pa^C = "no estar en el paro"
Nos dan p(M) = 40% = 0'4, p(Pa/M) = 20% = 0'2, p(Pa/H) = 12% = 0'12, ….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me están pidiendo **p(sea mujer sabiendo que no está en el paro) = p(M/Pa^C)**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

$p(Pa^C) = p(H).p(Pa^C/H) + p(M).p(Pa^C/M) = (0'6)\cdot(0'88) + (0'4)\cdot(0'80) = 106/125 = 0'848$.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(M/Pa^C) =} \frac{p\left(M\cap Pa^C\right)}{p(Pa^C)} = \frac{p\left(M\right)\cdot p(Pa^C/M)}{p(M)} = \frac{(0'4)\cdot(0'8)}{0'848} \mathbf{= 20/53 \cong 0'37736}.$$