OPCION A

1.- a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x-5z=3 \\ 3x-3y+2z=0 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ **(1,5 puntos)**

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones **(1 punto)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 0=0\Rightarrow rang\ (A)\neq 3\Rightarrow$$

$No\ es\ sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow 3x-5z=3\Rightarrow 3x=3+5z\Rightarrow x=\frac{3+5z}{3}\Rightarrow x=1+\frac{5z}{3}\Rightarrow 2\cdot\left(1+\frac{5z}{3}\right)-y-z=1\Rightarrow$$

$$2+\frac{10z}{3}-y-z=1\Rightarrow y=2-1+\frac{10z}{3}-z\Rightarrow y=1+\frac{7z}{3}\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(1+\frac{5\lambda}{3}\ ,1+\frac{7\lambda}{3}\ ,\ \lambda\right)$$

$o\ Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z)=(1+5\lambda\ ,1+7\lambda\ ,\ 3\lambda)$

2.- Sean en $\Re^3$ los vectores $\vec{e}=(0\ ,1\ ,0)\ ,\vec{u}=(3\ ,-2\ ,2)\ y\ \vec{v}=(0\ ,1\ ,1)$

a) Calcule el producto vectorial $\vec{e}\times\vec{u}$ **(0,75 puntos)**

b) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ **(0,75 puntos)**

c) Demuestre que la familia $\left\{\vec{e}\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}\right\}$ es linealmente independiente **(1 punto)**

$a)$

$$\vec{e}\times\vec{u}=\vec{e}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{e}\times\vec{u}=(2\ ,0\ ,-3)$$

$b)$

$$\cos\phi=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{|(3\ ,-2\ ,2)\cdot(0\ ,1\ ,1)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|0-2+2|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}=\frac{0}{\sqrt{34}}=0\Rightarrow\phi=arc\cos 0=90^{o}=\frac{\pi}{2}\ rad$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

$c)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 \Rightarrow Son\ linealmente\ independientes$$

3.- a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$$ **(1,5 puntos)**

b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior represente, aproximadamente, la gráfica de la función **f(x) (0,5 puntos)**

$a)$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+1}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Dom\,(f) = \forall x \in \Re - \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

	$-\infty$ **-1**	**-1** **1**	**1** ∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x^2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x \in \Re / (x < -1) \cup (x > 1)$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / -1 < x < 1$

Máximo relativo en $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1)} = \frac{2}{(-1)} = -2$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$ de decrecimiento pasa a crecimiento

Asíntota vertical $\Rightarrow x = 0$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x \to \infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = \frac{\infty}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{-\infty}} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x \to -\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción A

a) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{1+0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

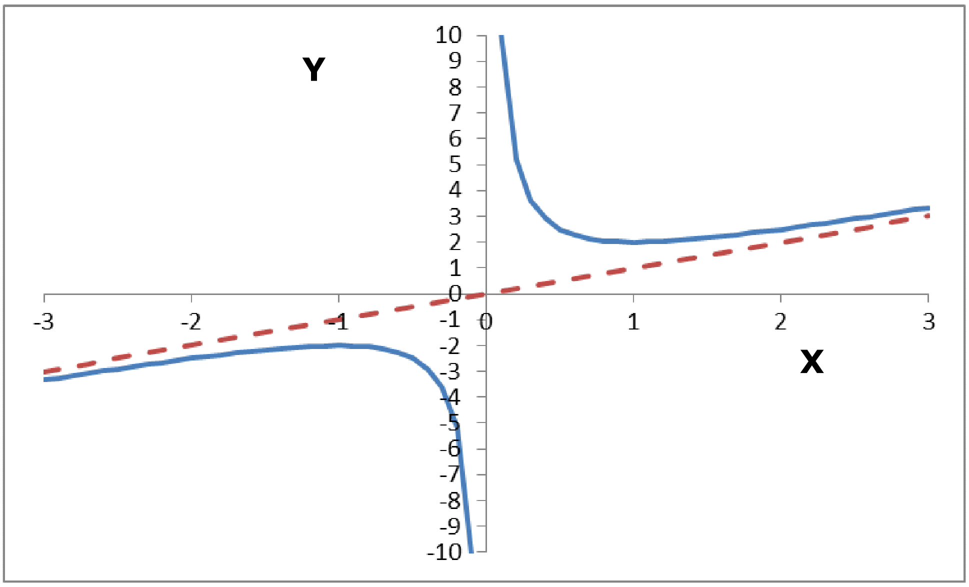
$$\textit{Existe asíntota oblicua}\ ,\ y=x\ ,\textit{cuando}\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{1+0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\textit{Existe asíntota oblicua}\ ,\ y=x\ ,\textit{cuando}\ x\to-\infty$$

b)



4.- Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva **F(x)** de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla **F(0) = 0 (2 puntos)**

$$F(x)=\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,xdx=\int\frac{t^2-1}{t}\,tdt=\int\left(t^2-1\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\sqrt{1+x^2}+K$$

$$1+x^2=t^2\Rightarrow 2x\,dx=2t\,dt\ \Rightarrow x\,dx=t\,dt\ \Rightarrow x^2=t^2-1$$

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}+K=\left(\frac{1+x^2}{3}-1\right)\sqrt{1+x^2}+K=\left(\frac{1+x^2-3}{3}\right)\sqrt{1+x^2}+K$$

$$F(x)=\left(\frac{x^2-2}{3}\right)\sqrt{1+x^2}+K\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow\left(\frac{0^2-2}{3}\right)\sqrt{1+0^2}+K=0\Rightarrow-\frac{2}{3}+K=0\Rightarrow K=\frac{2}{3}\ \Rightarrow$$

$$F(x)=\left(\frac{x^2-2}{3}\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{2}{3}$$

5.- En una población se sabe que el 80% de los jóvenes tienen ordenador portátil, el 60% tiene teléfono móvil, y el 10% no tiene ni portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil. **(1 punto)**

Sean los sucesos A = ”jóvenes con portátil” y B = “jóvenes con móvil”.

Nos dan p(A) = 80% = 0’8, p(B) = 60% = 0’6, p(noA y noB) = p($A^C \cap B^C$) = 10% = 0’1

Me están pidiendo **p(tiene portátil sabiendo que tiene móvil) = p(A/B)**

Sabemos que **p(A/B) =** $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$

De p(noA y noB) = p($A^C \cap B^C$) = 0’1 = {Ley de Morgan} = p($A\cup B$)^C = {suceso contrario} = 1 - p($A\cup B$), tenemos 0’1 = 1 - p($A\cup B$), es decir p($A\cup B$) = 1 – 0’1 = 0’9.

De p($A\cup B$) = p(A) + p(B) - p($A\cap B$), tenemos p($A\cap B$) = p(A) + p(B) - p($A\cup B$) = 0’8 + 0’6 – 0’9 = 0’5.

Por tanto **p(A/B) =** $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0'5}{0'6}=\dfrac{5}{6}\cong 0'8333.$

Opción B

1.- Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

a) Obtenga la matriz **A · B** y calcule su rango **(1,25 puntos)**
b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones **A · B · X = O** **(1,25 puntos)**

$a)$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\,(A\cdot B)=1$$

$b)$

$$A\cdot B\cdot X=O\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-2y\\-x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow x=2y\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y)=(2\lambda\,,\,\lambda)$$

2.- En $\Re^3$ se consideran las rectas de ecuaciones: $r:\begin{cases}3x+2y=0\\x-2z=-8\end{cases}$, $s:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z-1}{-1}$

a) Halle el valor de **a** para que **r** y **s** sean paralelas **(1 punto)**
b) Para el valor de **a** obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia entre **r** y **s** **(1,5 puntos)**

a) Los vectores directores de las dos rectas son iguales o proporcionales

$$x=-8+2z\Rightarrow-24+6z+2y=0\Rightarrow-12+3z+y=0\Rightarrow y=12-3z\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2\,,-3\,,1)\\\overrightarrow{v_s}=(-2\,,a\,,-1)\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{-2}=\frac{-3}{a}=\frac{1}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-3}{a}\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3\\\dfrac{2}{-2}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow-2=-2\\\dfrac{-3}{a}=\dfrac{1}{-1}\Rightarrow a=3\end{cases}\Rightarrow a=3$$

Continuación del Problema 2 de la opción B

b) Hallamos un plano π perpendicular a las rectas **r** y **s** que contenga un punto cualquiera de una de las rectas (tomamos el punto **R** de la recta **r** indicado en su ecuación), que tendrá como vector director el de las rectas y que es perpendicular al vector **RG** siendo **G** el punto genérico del plano, su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano.

Hallamos el punto **Q** de intersección del plano π con la recta **s**, el modulo del vector **RQ** es la distancia que se pide.

$$Siendo\ R(-8,12,0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (2,-3,1) \\ \overrightarrow{RG} = (x,y,z)-(-8,12,0) = (x+8,y-12,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{RG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{RG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2,-3,1)\cdot(x+8,y-12,z)=0 \Rightarrow 2x+16-3y+36+z=0 \Rightarrow \pi : 2x-3y+z+52=0 \Rightarrow$$

$$Punto\ Q \Rightarrow s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=3+3\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow 2(-1-2\lambda)-3(3+3\lambda)+(1-\lambda)+52=0 \Rightarrow -2-4\lambda-9-9\lambda+1-\lambda+52=0$$

$$-14\lambda+42=0 \Rightarrow 14\lambda=42 \Rightarrow \lambda=\frac{42}{14}=3 \Rightarrow Q\begin{cases} x=-1-2\cdot 3=-7 \\ y=3+3\cdot 3=12 \\ z=1-3=-2 \end{cases} \Rightarrow Q(-7,12,-2) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{RQ}=(-7,12,-2)-(-8,12,0)=(1,0,-2) \Rightarrow d(r,s)=\left|\overrightarrow{RQ}\right|=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}\ u$$

3.- Calcule, aplicando la regla de L'Hopital , el límite $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos x)}$ **(2 puntos)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos x)} = \frac{sen\,(2\cdot 0)+(1-0)^2-1}{\ln(\cos 0)} = \frac{sen\,0+1^2-1}{\ln(1)} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos(2x)+2\cdot(-1)\cdot(1-x)}{\frac{-sen\,x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cos(2x)-2+2x}{\frac{-sen\,x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\cos x\,[\cos(2x)+x-1]}{sen\,x} =$$

$$= \frac{-2\cdot\cos 0\cdot[\cos(2\cdot 0)+0-1]}{sen\,0} = \frac{-2\cdot 1\cdot[\cos 0-1]}{0} = \frac{-2\cdot[1-1]}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital} =$$

$$\lim_{x\to 0} -2\cdot\frac{(-sen\,x)[\cos(2x)+x-1]+[-2sen\,(2x)+1]\cdot\cos x}{\cos x} =$$

$$= -2\cdot\frac{(-sen\,0)[\cos(2\cdot 0)+0-1]+[-2sen\,(2\cdot 0)+1]\cdot\cos 0}{\cos 0} = -2\cdot\frac{0\,[\cos(0)-1]+[-2sen\,(0)+1]\cdot 1}{1} =$$

$$= -2\cdot\frac{0\cdot[1-1]+[-2\cdot 0+1]\cdot 1}{1} == -2\cdot\frac{0\cdot 0+[0+1]\cdot 1}{1} = -2\cdot\frac{0+1}{1} = -2$$

4.- a) Calcule los puntos en los que las dos curvas **$y = e^x$**, **$y = -x^2$** cortan a la recta **$x = 0$** y a la recta **$x = 1$** **(0,5 puntos)**
b) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas **$y = e^x$** , **$y = -x^2$** y por las rectas **$x = 0$** y **$x = 1$** **(1,5 puntos)**

$a)$

$$Puntos\ de\ corte \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \Rightarrow y(0)=e^0=1 \\ x=1 \Rightarrow y(1)=e^1=e \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \Rightarrow y(0)=-0^2=0 \\ x=1 \Rightarrow y(1)=-1^2=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$b)$

$$A=\int_0^1 e^x dx+\left|\int_0^1 -x^2 dx\right|=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 -x^2 dx=\int_0^1 e^x dx+\int_0^1 x^2 dx=\left[e^x\right]_0^1+\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1=\left(e^1-e^0\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)$$

$$A=e-1+\frac{1}{3}=\frac{3e-2}{3}\,u^2$$

5.- Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40% de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio solo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres; en la de natación hay 250 socios, 180 de ellos mujeres; y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis **(1 punto)**

Llamemos M, H, B, N y T, a los sucesos siguientes, “mujeres”, “hombres”, "baloncesto”, “natación" y "tenis", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Baloncesto = A	Natación = N	Tenis = T	Totales ↓
Hombres = H				
Mujeres = M	120	180		40% de 1000
Totales →	400	250		1000

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Baloncesto = A	Natación = N	Tenis = T	Totales ↓
Hombres = H	**280**	**70**	**250**	**600**
Mujeres = M	120	180	**100**	400
Totales →	400	250	**350**	1000

Me piden **p(sea varón y de la sección de tenis) = p(H∩T) =**

$= \dfrac{\text{Total varones y de la sección tenis}}{\text{Total de los totales}}$ **= 250/1000 = 1/4 = 0’25**.