OPCIÓN A

1.- **(a)** Discuta, en función del parámetro λ, el sistema lineal de ecuaciones **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2y - z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{array}\right\}$$

(b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$. **(0,5 puntos)**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1-2\lambda \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1-2\lambda \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -[-(1-\lambda)-(\lambda-1)\cdot(-1-2\lambda)] \Rightarrow$$

$$|A| = (1-\lambda)-(\lambda-1)\cdot(1+2\lambda) = (1-\lambda)+(1-\lambda)\cdot(1+2\lambda) = (1-\lambda)\cdot(1+1-2\lambda) = (1-\lambda)\cdot(2-2\lambda)$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2\cdot(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\forall\lambda \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$Si\ \lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

$$Si\ \lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y+2z = 1 \Rightarrow y = -1+2z \Rightarrow x+2\cdot(-1+2z)-z = 0 \Rightarrow x-2+4z-z = 0 \Rightarrow x = 2-3z$$

$$\Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2-3\lambda\ ,\ -1+2\lambda\ ,\ \lambda)$$

2.- Sean el plano $\Pi : y + z = 0$ y la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

(a) Calcule la intersección del plano y la recta. **(1 punto)**

(b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1,0,0)$, es paralela al plano Π y es perpendicular a la recta r. **(1,5 puntos)**

a) Sea **Q** el punto de intersección buscado

$$r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Rightarrow 1-2\lambda+1+\lambda = 0 \Rightarrow 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow Q\begin{cases} x = -1+2 \\ y = 1-2\cdot 2 \\ z = 1+2 \end{cases} \Rightarrow Q(1\ ,\ -3\ ,\ 3)$$

Continuación del Problema 2 de la opción A
b) El vector director de la recta **s** es perpendicular al de la recta **r** y al del plano π, por lo tanto es el resultado del producto vectorial de ambos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (3,1,-1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

3.- (a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x) = x^3 + x - 3$ tiene una raíz real positiva. **(1,5 puntos)**
(b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$. **(2 puntos)**

a)
<u>Teorema de Bolzano</u>
Si **f(x)** es continua en el intervalo **[a , b],** y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo **[sign f(a) $\neq$ sign f(b)]**, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que **f(c) = 0**
En nuestro caso f(x) es continua en el intervalo en todo su dominio $Dom(f) = \forall x \in \Re$ y toma los valores en los extremos $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ de tal manera que **[sign f($+\infty$) $\neq$ sign f($-\infty$)],** entonces existe, al menos, un punto $c \in \Re$ tal que **f(c) = 0**

$b)$

$$F(x) = \int (x+1)e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -(x+2)e^{-x} + K$$

$$\begin{cases} u = x + 1 \Rightarrow du = dx \\ e^{-x}dx = dv \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = \int e^{t}(-dt) = -\int e^{t}dt = -e^{t} = -e^{-x} \end{cases}$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow -(0+2)e^{-0} + K = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + K = 0 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow F(x) = -(x+2)e^{-x} + 2$$

4.- En una red social el 55% lee noticias deportivas, el 65% lee noticias de información, y el 10% no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:
(a) calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información. (0'5 puntos)
(b) sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes. (0'5 puntos)
(c) sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información. (0'5 puntos)

En una red social el 55% lee noticias deportivas, el 65% lee noticias de información, y el 10% no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:
(a)
calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información.

Sean los sucesos A = ”lee noticias deportivas” y B = “lee noticias de información”.
Nos dan p(A) = 55% = 0’55, p(B) = 65% = 0’65, p(no lee ni deportivas ni de información) = 10% =
= p(noA y noB) = p($A^C \cap B^C$) = 10% = 0’1

Me están pidiendo **p(A o B) = p(A$\cup$B)**
Tenemos 0’1 = p($A^C \cap B^C$) = {ley de Morgan} = p($A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A$\cup$B), por tanto resulta que 0’1 = 1 - p(A$\cup$B), de donde **p(A$\cup$B) =** 1 – 0’1 **= 0’9.**
(b)
sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, es decir $0'9 = 0'55 + 0'65 - p(A\cap B)$, por tanto nos resulta que *$p(A\cap B)$* $= 0'55 + 0'65 - 0'9 =$ *$0'3$*

Me están pidiendo **p(leer deportes sabiendo que lee información) = p(A/B) =** $\frac{p(A\cap B)}{p(B)} =$

$= 0'3/0'65$ **$= 6/13 \cong 0'46154$.**

(c)

sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información.

Me están pidiendo **p(no leer información sabiendo que lee deportes) = p(noB/A) = $p(B^C/A)$ =**

= $\frac{p(B^C\cap A)}{p(A)} = \frac{p(A\cap B^C)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A\cap B)}{p(A)} = (0'55 - 0'3)/0'55$ **$= 5/11 \cong 0'454545$.**

Opción B

1.- Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$. **(1 punto)**

(b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A. **(1,5 puntos)**

a)

$$C = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

b) La condición para que una matriz tenga inversa es que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2+4) = -4 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-4)} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.- Sean los punto $A = (1, 0, 1)$ y la recta r dada por el punto $B = (-1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. **(a)** Calcule la distancia del punto A a la recta r. **(1,5 puntos)**

(b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo $O = (0, 0, 0)$. **(1 punto)**

a) Hallaremos un plano π que contenga al punto **A** y que sea perpendicular a la recta **r**, su vector director será el de la recta que es perpendicular al vector **BG**, siendo G el punto genérico del plano, y su producto escalar es nulo y la ecuación del plano buscado; hallado el punto de intersección Q, entre recta y plano, el módulo del vector AQ es la distancia pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{BG} = (x, y, z) - (-1, 0, 2) = (x+1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 0) \cdot (x+1, y, z-2) = 0$$

$$-x - 1 + y = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + 1 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - \lambda - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow -2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 - (-1) \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2, -1, 1) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AQ} = (2, -1, 1) - (1, 0, 1) = (2, -1, 0) \Rightarrow d(A, r) = \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}\ u$$

Continuación
b) Es la mitad del valor del módulo del vector resultante del producto vectorial de los vectores **OA** y **OB**

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1\,,0\,,1) - (0\,,0\,,0) = (1\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{OB} = (-1\,,0\,,2) - (0\,,0\,,0) = (-1\,,0\,,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{j} - 2\vec{j} = -3\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (0\,,-3\,,0) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \frac{3}{2}\, u^2$$

3.- (a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función **(1,5 puntos)**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

(b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior. **(0,5 puntos)**
(c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$. **(1,5 puntos)**

a)

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow Dom\,(f) = \forall x \in \Re - \{-1\,,1\}$$

$$As\acute{\imath}ntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow Existe\ as\acute{\imath}ntota\ horizontal,\ y = 0,\ cuando\ x \to \infty$$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow Existe\ as\acute{\imath}ntota\ horizontal,\ y = 0,\ cuando\ x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ as\acute{\imath}ntota\ oblicua\ cuando\ x \to \infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ as\acute{\imath}ntota\ oblicua\ cuando\ x \to -\infty$$

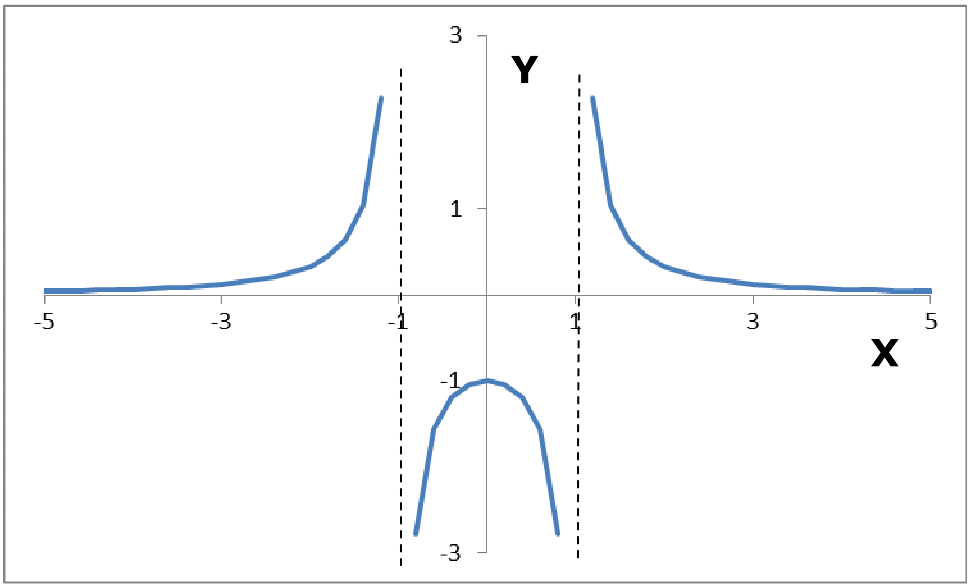
$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow Crecimiento\ \ f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ (x^2-1)^2 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$	**0** ∞
-2 < 0	**(-)**	**(-)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
$(x^2 - 1)^2 > 0$	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x \in \Re \,/\, x > 0$ **Decrecimiento** $\forall x \in \Re \,/\, x > 0$

Máximo relativo $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1$ de crecimiento pasa a decrecimiento

Continuación del Problema 3 de la opción B
b)



c)

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\Rightarrow x^2-1=(x-1)(x-1)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow$$

$$A(x+1)+B(x-1)=1\Rightarrow\begin{cases}Si\ x=-1\Rightarrow A(-1+1)+B(-1-1)=1\Rightarrow -2B=1\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2}\\ Si\ x=1\Rightarrow A(1+1)+B(1-1)=1\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{2}\ln t=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{t}=\ln\left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+K$$

$$\begin{cases}x-1=u\Rightarrow dx=du\\x+1=t\Rightarrow dx=dt\end{cases}$$

4.- A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6’5 y desviación típica 2. Calcule: (a) la nota de corte para los admitidos. (0’75 puntos)
(b) la probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor de 9. (0’75 puntos)

A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6’5 y desviación típica 2. Calcule:
(a) la nota de corte para los admitidos.

Nuestra variable X sigue una normal N(μ, σ) = N(6’5, 2). La variable Z sigue la normal N(0,1)

El problema nos dice que p(Z ≥ k) = 300/2500 = 0’12.

Tenemos 0’12 = p(Z ≥ k) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ k), de donde p(Z ≤ k) = 1 – 0’12 = 0’88. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’88 no viene; los más próximos son 0’8790 y 0’8810 que corresponden a valores de “k” 1’17 y 1’18, luego el valor de “k” buscado es el punto medio de ambos, por tanto k = (1’17 + 1’18)/2 = 1’175.
Tipificando tenemos $1'175=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-6'5}{2}$, de donde **X =** 2·1’175 + 6’5 **= 8’85, es decir la nota de corte para los admitidos es de 8’85.**‘

(b)
la probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor de 9. (0’75 puntos)

Me están pidiendo **p(X ≥ 9) =** {tipificando} = $p\left(Z \geq \frac{9 - 6'5}{2} \right)$ = p(Z ≥ 1’25) = {suceso contrario} =

= 1 - p(Z ≤ 1’25) = 1 – 0’8944 **= 0’1056 = 10’56%.**