PROPUESTA A

1.- (2 puntos) Sean **m** un número real y los vectores $\vec{u} = (1\ ,\ 0\ ,\ 1),\ \vec{v} = (2\ ,\ -1\ ,\ m)$

I) Hallen todos los vectores de módulo 3 que son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

II) Determine, si existe, un valor **m** tal que el correspondiente vector $\vec{v}$ forma un ángulo de **45º** con el vector $\vec{u}$

I) Serán vectores 3 $\vec{w}$ en donde $\vec{w}$ es el vector unitario que resulta del cálculo del producto vectorial de ambos reducidos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2\vec{j} - \vec{k} + \vec{i} - m\vec{j} = \vec{i} + (2-m)\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (1\ ,\ 2-m\ ,\ -1) \Rightarrow$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{1^2 + (2-m)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4-2m+m^2+1} = \sqrt{m^2-2m+6}$$

$$vector\ unitario \Rightarrow \left\|\vec{w}\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{m^2-2m+6}}\ ,\ \frac{2-m}{\sqrt{m^2-2m+6}}\ ,\ -\frac{1}{\sqrt{m^2-2m+6}} \right)$$

$$Vectores\ de\ \text{mod}ulo\ 3\vec{w} = 3 \cdot \left\|\vec{w}\right\| = \left(\frac{3}{\sqrt{m^2-2m+6}}\ ,\ \frac{3\cdot(2-m)}{\sqrt{m^2-2m+6}}\ ,\ -\frac{3}{\sqrt{m^2-2m+6}} \right)$$

$II)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} \Rightarrow \cos 45º = \frac{\left|(1\ ,\ 0\ ,\ 1)\cdot(2\ ,\ -1\ ,\ m)\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+m^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2+m|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{2} = \frac{|2+m|}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow 1 = \pm\frac{2+m}{\sqrt{5+m^2}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5+m^2} = (2+m) \\ \sqrt{5+m^2} = -(2+m) \end{cases} \Rightarrow 5+m^2 = (2+m)^2 \Rightarrow$$

$$5+m^2 = 4+4m+m^2 \Rightarrow 4m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

2.- (3 puntos)

(I) Halle, según el valor del parámetro **a**, el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$

(II) Sean dos matrices **A** y **B** dos matrices cuadradas de orden **4** tales que el **det(AB) = 1** ¿Qué se puede decir del rango de **A**?

$$I)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & a+2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4(a+2) \end{pmatrix} \Rightarrow \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4(a+2) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$4(a+2) - 3 = 0 \Rightarrow 4a + 8 = 3 \Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow \forall a \in \Re - \left\{ \frac{5}{4} \right\} \Rightarrow rang\ (A) = 3$$

$$Si\ a = \frac{5}{4} \Rightarrow rang\ (A) = 2$$

$$II)$$

$$|AB| = 1 \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A \cdot B = A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t = I$$

Para que se puedan multiplicar los rangos de A y B son iguales

3.- (2 puntos) En una Universidad el **30%** de los alumnos va a la cafetería **A**, el **60%** va a la cafetería **B** y el **20%** va a ambas cafeterías.
(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería **A**, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería **B**
(II) Si se elige al azar un estudiante de esa Universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería **A** ni a la cafetería **B**

En una Universidad el **30%** de los alumnos va a la cafetería **A**, el **60%** va a la cafetería **B** y el **20%** va a ambas cafeterías.
(I)
Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería **A**, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería **B**

Sean los sucesos A = ”ir a la cafetería A” y B = “ir a la cafetería B”.

Nos dan p(A) = 30% = 0’3, p(B) = 60% = 0’6, p(ir a ambas) = $p(A\cap B)$ = 20% = 0’2.

Me están pidiendo **p(sabiendo que va a la cafetería A, que vaya también a la B) = p(B/A) =**

= $\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ = (0’2)/(0’3) **= 2/3** $\cong$ **0’6667.**

(II)
Si se elige al azar un estudiante de esa Universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería **A** ni a la cafetería **B**

Me piden **p(noA y noB) =** $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A\cup B)$ =**
** = 1 – 0’7 **= 0’3**.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0’3 + 0’6 – 0’2 = 0’7

4.- (3 puntos) Sea $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$ **.** Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real **x**, para la función **f** estudie:

(I) El dominio y las asíntotas
(II) La monotonía y los extremos relativos
(III) Dibuje la gráfica de **f** destacando los elementos anteriores

$I)$

$$e^x - x \neq 0 \Rightarrow \text{ } porque \text{ } \forall x \Rightarrow e^x > x \Rightarrow e^x - x > 0 \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re$$

No hay asíntotas verticales

Continuación del Problema 4 de la Propuesta A

$I)$*Continuación*

Asíntotas horizontales (Continuación)

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Existe asíntota horizontal, $y=1$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}+(-x)}{e^{-x}-(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x}-x}{\frac{1}{e^x}+x}=\frac{\frac{1}{\infty}-\infty}{\frac{1}{\infty}+\infty}=\frac{0-\infty}{0+\infty}=\frac{-\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}-1}{-e^{-x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{e^x}-1}{-\frac{1}{e^x}+1}=\frac{-\frac{1}{e^\infty}-1}{-\frac{1}{e^\infty}+1}=\frac{-\frac{1}{\infty}-1}{-\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1\Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y=-1$ *cuando* $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x+x}{e^x-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x\left(e^x-x\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{\left(e^x-x\right)+x\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x-x+xe^x-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x+xe^x-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+xe^x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x+xe^x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3e^x+xe^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{(3+x)e^x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3+x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua},\ x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x+x}{e^x-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{x\left(e^x-x\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{\left(e^x-x\right)+x\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x-x+xe^x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+xe^x-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x-2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2e^x+xe^x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2e^x+xe^x+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{3e^x+xe^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{(3+x)e^x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3+x}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow \textit{No existe asíntota oblicua},\ x\to-\infty$$

Continuación del Problema 4 de la Propuesta A

$II)$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x-x)-(e^x-1)(e^x+x)}{(e^x-x)^2}=\frac{(e^{2x}-xe^x+e^x-x)-(e^{2x}+xe^x-e^x-x)}{(e^x-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}-xe^x+e^x-x-e^{2x}-xe^x+e^x+x}{(e^x-x)^2}=\frac{-2xe^x+2e^x}{(e^x-x)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}\Rightarrow$$

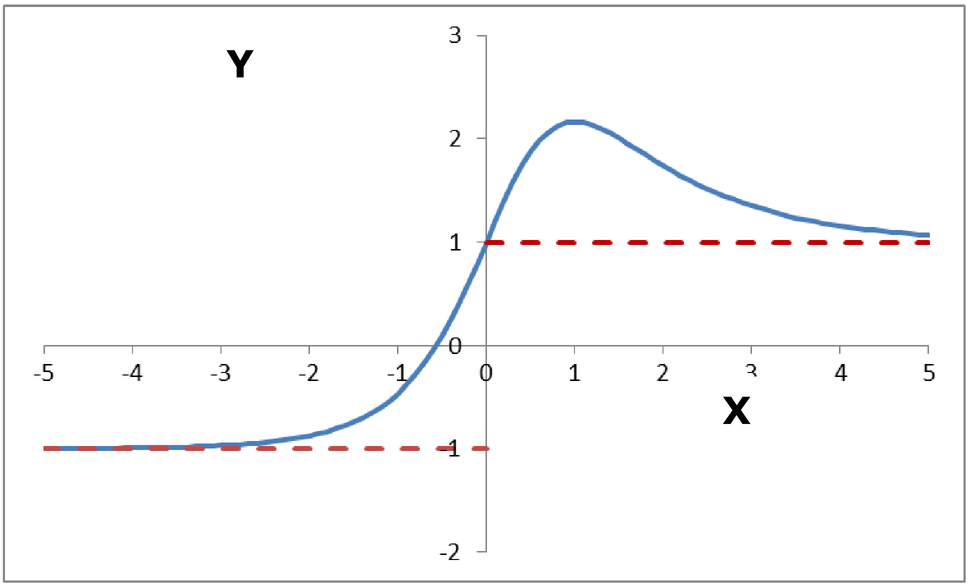
$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ e^x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ (e^x-x)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ 1-x>0\Rightarrow-x>-1\Rightarrow x<1\end{cases}$$

	$-\infty$	1 ∞
2 > 0	(+)	(+)
$e^x > 0$	(+)	(+)
$(e^x - 2)^2 > 0$	(+)	(+)
x < 1	(+)	(-)
Solución	(+)	(-)

Creciente $\forall x\in\Re/x<1$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/x>1$

Máximo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{e^1+1}{e^1-1}=\frac{e+1}{e-1}$

c)



PROPUESTA B

1.- (2 puntos) Sean **m** un número real y consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

I) Halle los valores de **m** para los que **A** tiene inversa
II) Determine el rango de **A** cuando **m = 2**

I) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 4\end{vmatrix}=-(4-m^2)=m^2-4\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow m^2-4=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow$$

$$m=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}m=-2\\ m=2\end{cases}\Rightarrow\forall x\in\Re-\{-2\,,2\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$II)$

$$Si\ m=2\Rightarrow|A|=2^2-4=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

2.- (3 puntos)
I) Pruebe que cualquiera que sea el valor de **a**, los planos $\pi_1 : ax+ay-z=0$, $\pi_2 : x-y+az=0$ se cortan en una recta **r**
II) Estudie, en función de **a**, la posición relativa de la recta **r** y el plano que pasa por los puntos **A(1 , 1 , 1)**, **B(1 , 0 , 2)** y **C(0 , 1 , 2a)**

I) Dos planos son paralelos o se confunden o se cortan según una recta. En lo dos primeros casos sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo las rectas se cortan segur una recta a la que definen.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_{\pi_1}}=(a\,,a\,,-1)\\ \overrightarrow{v_{\pi_2}}=(1,-1,a)\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{1}\neq\frac{a}{-1}\Rightarrow \text{Se cortan segun una recta r}$$

Continuación del Problema 2 de la Propuesta B

II) Determinada un sistema de ecuaciones determinado por las ecuaciones de π_1 , π_2 y el plano α que hallaremos, si esta es **Compatible Determinado** se cortan en un punto por lo tanto la recta r y el plano α **;** si el sistema es **Compatible Indeterminado** la recta pertenece al plano α , y si es **Incompatible**, el sistema, la recta **r** y el plano α son paralelos.

Para definir el plano α , que contiene a los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo el producto mixto de estos tres vectores (que es el volumen del paralelepípedo que forman),que son coplanarios, nulo y la ecuación del plano α

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,2a)-(1,1,1)=(-1,0,1-2a) \\ \overrightarrow{AG} = (x,y,z)-(1,1,1)=(x-1,y-1,z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1-2a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(1-2a)(x-1)-(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow (2a-1)(x-1)-(y-1)-(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$(2a-1)x-y+1-z+1-2a+1=0 \Rightarrow \alpha : (2a-1)x-y-z+3-2a=0$$

$$\begin{cases} ax+ay-z=0 \\ x-y+az=0 \\ (2a-1)x-y-z=2a-3 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ a^2+1 & a^2-1 & 0 \\ -1 & -1-a & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2-1 \\ -1 & -1-a \end{vmatrix}$$

$$|A| = -(1+a)(a^2+1)+(a^2-1) = -a^2-1-a^3-a+a^2-1 = -a^3-a-2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -a^3-a-2=0 \Rightarrow$$

$$a^3+a+2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow a^3+a+2=0 \Rightarrow (a+1)\cdot(a^2-a+2)=0$$

$$a^2-a+2=0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2-4\cdot 1\cdot 2 = -7 < 0 \Rightarrow \text{Sin } solución$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ incógnitas \Rightarrow Se\ cortan\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \alpha$$

$$Si\ a=-1$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \alpha\ son\ paralelos$$

3.- (2 puntos) En una Universidad el **30%** de los alumnos va a la cafetería **A**, el **60%** va a la cafetería **B** y el **20%** va a ambas cafeterías.

(I) Si se elige al azar un estudiante que va a la cafetería **A**, halle la probabilidad de que también vaya a la cafetería **B**

(II) Si se elige al azar un estudiante de esa Universidad, calcule la probabilidad de que el estudiante no vaya a la cafetería **A** ni a la cafetería **B**

Resuelto como Problema 3 de la Propuesta A

4.- (3 puntos) Sea $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-x}$ **.** Sabiendo que $e^x > x$ para todo número real **x**, para la función **f** estudie:

(I) El dominio y las asíntotas

(II) La monotonía y los extremos relativos

(III) Dibuje la gráfica de **f** destacando los elementos anteriores

Resuelto como Problema 4 de la Propuesta A