

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular el $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) (1 punto) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$

a)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \cdot e^{2 \cdot 0} = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\ln(0+1)}{0+1} = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

Es continua en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2xe^{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} e^{2x}(1+2x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = e^{2 \cdot 0}(1+2 \cdot 0) = e^0(1+0) = 1 \cdot 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1 - \ln(0+1)}{(0+1)^2} = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1-0}{1} = 1 \end{cases}$$

Es derivable en $x = 0$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot e^{2(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \cdot e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{2x}} = -\frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^{2x}} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

c)

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{e^{2x}}{2} = \left(\frac{2x-1}{2}\right) \cdot \frac{e^{2x}}{2} = (2x-1) \cdot \frac{e^{2x}}{4} + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow du = dx \\ e^{2x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{e^t}{2} = \frac{e^{2x}}{2} = \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_{-1}^0 xe^{2x} dx = \left[(2x-1) \cdot \frac{e^{2x}}{4} \right]_{-1}^0 = \left[(2 \cdot 0 - 1) \cdot \frac{e^{2 \cdot 0}}{4} - (2 \cdot (-1) - 1) \cdot \frac{e^{2 \cdot (-1)}}{4} \right] = -\frac{e^0}{4} - \frac{e^2}{4} = -\frac{1}{4} \cdot (1 + e^2)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ se pide:

- a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2
 b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.
 c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1, 2, 3)$.

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden.

Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 2 \Rightarrow 4x - y = 1 \Rightarrow y = -1 + 4x \Rightarrow 2x - (-1 + 4x) + z = 1 \Rightarrow z = -2x - 1 + 4x \Rightarrow z = 2x \\ 6y + 6z = 0 \Rightarrow y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow 3x - z + 4z = 3 \Rightarrow 3x + 3z = 3 \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ -1 + 4\lambda = -\mu \\ 2\lambda = -\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Las rectas son paralelas o se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (1, 4, 2) \\ \vec{v}_{r_2} = (-1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

La rectas r_1 y r_2 se cruzan en el espacio

b) Trazaremos un plano π que contenga a r_1 y sea paralelo a r_2 ; queda determinado por los vectores directores de r_1 y r_2 , y pro el vector R_1G , siendo R_1 un punto cualquiera de la recta r_1 (tomaremos el indicado en su ecuación) y G el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que determinan) nulo y la ecuación del plano que queríamos determinar. Se hallara la distancia de un punto R_2 cualquiera de la recta r_2 (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano π que es la distancia entre las dos rectas pedida.

$$\text{Siendo } R_1(0, -1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (1, 4, 2) \\ \vec{v}_{r_2} = (-1, -1, 1) \equiv (1, 1, -1) \\ \vec{R_1G} = (x, y, z) - (0, -1, 0) = (x, y+1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-4x + 2 \cdot (y+1) + z - 4z - 2x + (y+1) = 0 \Rightarrow -6x + 3 \cdot (y+1) - 3z = 0 \Rightarrow -2x + y + 1 - z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\text{Siendo } R_2(1, 0, 0) \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(\pi, R_2) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

c) El plano β contiene al vector director de la recta r_1 , al vector PR_1 , donde R_1 es un punto cualquiera de la recta r_1 y el vector PG , siendo G el punto genérico del plano.

Los tres vectores son coplanarios y su producto mixto (que es el volumen del tetraedro que determinan) nulo y la ecuación del plano β que queremos determinar.

$$\text{Siendo } R_1(0, -1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{r_1} = (1, 4, 2) \\ \vec{PR}_1 = (0, -1, 0) - (1, 2, 3) = (-1, -3, -3) \equiv (1, 3, 3) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{cases} \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) - 3(z-3) - 12(x-1) - 2(y-2) = 0 \Rightarrow -6(x-1) + (y-2) + (z-3) = 0 \Rightarrow \beta \equiv 6x - y - z - 1 = 0$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

Se dispone de tres aleaciones **A**, **B** y **C** que contienen entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de **A**, y gramos de **B** y z gramos de **C**. Determinése las cantidades x , y , z

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ \frac{100}{100}x + \frac{75}{100}y + \frac{60}{100}z = \frac{72}{100} \cdot 25 \\ \frac{15}{100}y + \frac{22}{100}z = \frac{16}{100} \cdot 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 75y + 60z = 1800 \\ 15y + 22z = 400 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 75 & 60 \\ 0 & 15 & 22 \end{vmatrix} = 1650 + 15 - 900 - 22 = 743$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 & 1 \\ 1800 & 75 & 60 \\ 400 & 15 & 22 \end{vmatrix}}{743} = \frac{41250 + 24000 + 27000 - 30000 - 22500 - 39600}{743} = \frac{92250 - 92100}{743} = \frac{150}{743}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 1 \\ 1 & 1800 & 60 \\ 0 & 400 & 22 \end{vmatrix}}{743} = \frac{39600 + 400 - 24000 - 550}{743} = \frac{40000 - 24550}{743} = \frac{15450}{743}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 1 & 75 & 1800 \\ 0 & 15 & 400 \end{vmatrix}}{743} = \frac{30000 + 375 - 27000 - 400}{743} = \frac{30375 - 27400}{743} = \frac{2975}{743}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{150}{743}, \frac{15450}{743}, \frac{2975}{743} \right) \text{ gr}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dados dos sucesos **A** y **B** de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$

y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

- a) (1 punto) Comprobar si los sucesos **A** y **B** son independientes o no
 b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}|B)$, donde \bar{A} denota el suceso complementario de **A**

a)
 Comprobar si los sucesos **A** y **B** son independientes o no

Nos dan $p(A) = 4/9$, $p(B) = 1/2$, y $p(A \cap B) = 2/3$.

Sabemos que A y B independientes si se verifica: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, tenemos $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 4/9 + 1/2 - 2/3 = 5/18$.

Como $p(A \cap B) = 5/18 \neq p(A) \cdot p(B) = (4/9) \cdot (1/2) = 2/9$, los sucesos **A** y **B** no son independientes.

b)
 Calcular $p(\bar{A}|B)$, donde \bar{A} denota el suceso complementario de **A**

Me están pidiendo $p(A^c|B) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A^c) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{(1 - p(A)) - p(A \cap B)}{p(B)} =$
 $= [(1 - 4/9) - 5/18] / (1/2) = 5/9$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) **(0,5 puntos)** Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
 b) **(1,5 puntos)** Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$, $A^3 - I$.
 c) **(1 punto)** Calcular la matriz inversa de A^6 en caso de que exista.

a)

$$B = (A - I) \cdot 2 \cdot (A + I) = 2 \cdot (A - I) \cdot (A + I) = 2 \cdot (A^2 - I^2) = 2 \cdot (A^2 - I)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A - I) = 2$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A^2 - I) = 1$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A^3 - I) = 2$$

c)

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^6| = \begin{vmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-6}$$

$$A^{-6} = \frac{1}{|A^6|} \cdot \text{adj}(A^6)^t \Rightarrow (A^6)^t = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A^6)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-6} = \frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$A^{-6} = \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Se considera la función: $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1}$, y se pide:

- a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- b) (1 punto) Estudiar la existencia de aristas horizontales y verticales de la función f , en su caso, determinarlas.
- c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en caso de que existan.

a)

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{e^{-0}}{0^2 + 1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1 \\ f'(x) = -\frac{e^{-0}(0^2 + 2 \cdot 0 + 1)}{(0^2 + 1)^2} = -\frac{1}{1^2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

b)

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x}(x^2 + 1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{Existe asíntota horizontal, } y = 0, \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-(-x)}}{(-x)^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\text{Utilizando L'Hopital}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\text{Utilizando L'Hopital}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

c)

$$f'(x) = (-1) \frac{e^{-x}(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = (-1) \frac{e^{-x}(x+1)^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	∞
-1 < 0		(-)
$e^{-x} > 0$		(+)
$(x + 1)^2 > 0$		(+)
$(x^2 + 1)^2 > 0$		(+)
Solución		(-)

Decreciente $\forall x \in \mathfrak{R}$

No hay máximos ni mínimos relativos

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$, se pide:

- a) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r
 b) Halla el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q

a) Para determinar la ecuación de la recta r hallaremos el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, que será el vector director de ella, y con uno de los puntos dados tendremos su ecuación (tomaremos P_1)

El vector \overrightarrow{QG} , donde G es el punto genérico de la recta r , es perpendicular al vector director de ella y su producto escalar es nulo. El punto G que se calcule es el punto de intersección.

El módulo del vector \overrightarrow{QG} es la distancia pedida

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (7, 0, 2) - (3, 2, 0) = (4, -2, 2) \equiv (2, -1, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QG} = (3 + 2\lambda, 2 - \lambda, \lambda) - (3, 5, -3) = (2\lambda, -3 - \lambda, \lambda + 3) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{QG} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{QG} = 0 \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (2\lambda, -3 - \lambda, \lambda + 3) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 3 + \lambda + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \text{Punto de intersección} \Rightarrow G \begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-1) \\ y = 2 - (-1) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow G(1, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{QG} = (1, 3, -1) - (3, 5, -3) = (-2, -2, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{QG}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} \Rightarrow d(r, Q) = |\overrightarrow{QG}| = 2\sqrt{3} u$$

Las coordenadas del punto G son las pedidas en el apartado b)

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide:

- a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno
 b) (1 punto) Obtener la medida de sus tres ángulos.

a) Calcularemos los lados del triángulo que son los módulos de los vectores AB , BC y CA , de ser iguales el triángulo es equilátero, si hay dos iguales el triángulo es isósceles y si son distintos, los tres, el triángulo es escaleno

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 3, -1) = (2, -2, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3 u \\ \overrightarrow{AC} = (2, 5, 1) - (1, 3, -1) = (1, 2, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 u \\ \overrightarrow{BC} = (2, 5, 1) - (3, 1, 0) = (-1, 4, 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} u \end{cases} \Rightarrow \text{Es isósceles}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

b) Calcularemos el ángulo A de los vectores AB y AC; el B con los vectores BC y BA y el ángulo C con los vectores CA y CB

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 3, -1) = (2, -2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 5, 1) - (1, 3, -1) = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{|(2, -2, 1) \cdot (1, 2, 2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 4 + 2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{0}{9} = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{A} = \arccos(0) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1, 3, -1) - (3, 1, 0) = (-2, 2, -1) \\ \overrightarrow{BC} = (2, 5, 1) - (3, 1, 0) = (-1, 4, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{|(-2, 2, -1) \cdot (-1, 4, 1)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 8 - 1|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} =$$

$$\cos \hat{B} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1, 3, -1) - (2, 5, 1) = (-1, -2, -2) \\ \overrightarrow{CB} = (3, 1, 0) - (2, 5, 1) = (1, -4, -1) \end{cases} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{|(-1, -2, -2) \cdot (1, -4, -1)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} =$$

$$\cos \hat{C} = \frac{|-1 + 8 + 2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$