UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2017-2018**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\alpha\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\ 37/2\\ 11\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro $\propto$.
b) (0.75 puntos) Para $\alpha=0$, calcular, si es posible, A^{-1}.
c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX=B$, en el caso $\alpha=0$.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}8e^{2x-4} & si \quad x\le 2\\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & si \quad x>2\end{cases}$ y se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de *f* en $x=2$.
b) (1 punto) Calcular las asíntotas de *f(x)*. ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ y el punto A(–4,4,7). Se pide:

a) (1 punto) Determinar el vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
b) (0.75 puntos) Hallar el vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
c) (0.75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

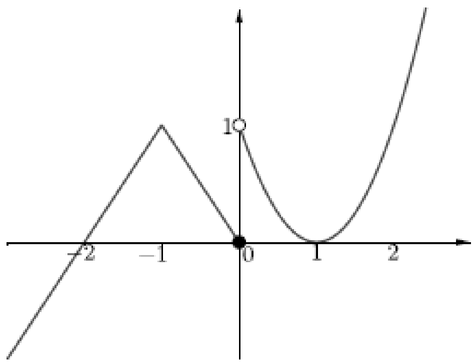
OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$.

Usando la información de la figura, se pide:

a) (0.5 puntos) Indicar los valores de *f(–1)* y *f ´((1)*.

b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si *f* es continua en los puntos x = –1 y x = 0.

c) (0.5 puntos) Indicar razonadamente si *f* es derivable en los puntos x = –1 y x = 0.

d) (0.5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto P(0,–1, 1) y la recta r, que pasa por el punto Q(1, 0, 1) y tiene como vector director $\vec{v} = (0,1,2)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1.5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8.5$ y desviación típica $\sigma = 2.5$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \le a) = 0,05$.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\alpha\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\ 37/2\\ 11\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro ∝.

b) (0.75 puntos) Para $\alpha=0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX=B$, en el caso $\alpha=1$.

a) El determinante de la matriz es:

$$|A|=\begin{vmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\alpha\end{vmatrix}=490\alpha-210-280=490\alpha-490$$

Si igualamos a cero:

$$|A|=0\Rightarrow 490\alpha-490=0\Rightarrow \alpha=\frac{490}{490}=1$$

Hay que estudiar dos casos distintos.

CASO 1. $\alpha\neq 1$

En este caso el rango de A es 3, pues su determinante es no nulo.

CASO 2. $\alpha=1$.

La matriz queda

$A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$. Su determinante es 0, por lo que el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que surge de quitar la fila 3ª y columna 3ª.

$\begin{vmatrix}14 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}=98\neq 0$. El rango es 2.

b) Para $\alpha=0$ la matriz queda

$A=\begin{pmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-210-280=-490\neq 0$$

Existe la inversa y se puede calcular con la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}14&0&3\\0&7&4\\10&5&0\end{pmatrix}}{-490}=\frac{1}{-490}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}7&4\\5&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&4\\10&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&7\\10&5\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&3\\5&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}14&3\\10&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}14&0\\10&5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&3\\7&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}14&3\\0&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}14&0\\0&7\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-490}\begin{pmatrix}-20&40&-70\\15&-30&-70\\-21&-56&98\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{490}\begin{pmatrix}20&-40&70\\-15&30&70\\21&56&-98\end{pmatrix}}$$

c) Para $\alpha=1$ la matriz queda

$A=\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\end{vmatrix}=490-210-280=0$$

La matriz no tiene inversa. Hay que resolver la ecuación $AX=B$ planteando el sistema asociado.

$$AX=B\Rightarrow\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\37/2\\11\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}14x\quad+10z=2\\7y+5z=\frac{37}{2}\\3x+4y+5z=11\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x\quad+5z=1\\7y+5z=\frac{37}{2}\\3x+4y+5z=11\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}7\cdot\text{ Ecuación 3ª - 3 }\cdot\text{ Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}21x&+28y&+35z&=77\\-21x&&-15z&=-3\\\hline&28y&+20z&=74\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x\quad+5z=1\\7y+5z=\frac{37}{2}\\28y+20z=74\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª - 4 }\cdot\text{ Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrr}28y&+20z&=74\\-28y&-20z&=-74\\\hline&0&=0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x\quad+5z=1\\7y+5z=\frac{37}{2}\\0=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x+5z=1\\7y+5z=\frac{37}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}7x=1-5z\\7y=\frac{37}{2}-5z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\frac{1-5z}{7}\\y=\frac{37}{14}-\frac{5z}{7}\end{array}\right\}$$

La matriz X solución de la ecuación $AX = B$ es $X = \begin{pmatrix} \frac{1-5z}{7} \\ \frac{37}{14} - \frac{5z}{7} \\ z \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & si \quad x \le 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & si \quad x > 2 \end{cases}$ y se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de *f* en $x = 2$.
b) (1 punto) Calcular las asíntotas de *f(x).* ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$

a) La función exponencial es continua y la función racional solo presenta problemas en x = 2 no incluido en la definición de f(x). Hay que estudiar la continuidad en el cambio de definición de la función, en x = 2.
Deben cumplirse:

- Existe $f(2) = 8e^{4-4} = 8$
- Existe $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 8e^{2x-4} = 8$
- Existe
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-4x}{x-2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2^+} x(x+2) = 8$$
- Los tres valores son iguales.

Como se cumplen las cuatro condiciones, la función es continua en x = 2 y por tanto, en todo R.

b)
Asíntota vertical, x = a.
No presenta ninguna, ya que podría ser x = 2, pero hemos calculado el limite
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-4x}{x-2} = 8$. Por lo que no es asíntota vertical.

Asíntota horizontal, y = b.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 8e^{2x-4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{8}{e^{-2x+4}} = \frac{8}{\infty} = 0$$
La función presenta una asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota oblicua, $y = mx + n$
Como la función presenta una asíntota horizontal en x < 0, solo estudiamos la posibilidad de asíntota oblicua en x > 0.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4x}{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-2x}=+\infty$$

La función no tiene asíntotas oblicuas.

c)

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 8e^{2x-4}dx=\left[\frac{8}{2}e^{2x-4}\right]_0^2=\left[4e^{4-4}\right]-\left[4e^{-4}\right]=\boxed{4-\frac{4}{e^4}}$$

<u>Ejercicio</u> 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$, $\vec{v}=(2,0,-1)$ y el punto A(–4,4,7). Se pide:

a) (1 punto) Determinar el vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0.75 puntos) Hallar el vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) (0.75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

a) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2i+6j-4k-j=-2i+5j-4k=(-2,5,-4)$$

Como además queremos que sea unitario, lo dividimos por su módulo.

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{4+25+16}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{w_1}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}=\frac{(-2,5,-4)}{3\sqrt{5}}=\left(\frac{-2}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}},\frac{-4}{3\sqrt{5}}\right)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_2}=a\vec{u}+b\vec{v}\\ \left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)\vec{v}=0\end{array}\right\}\Rightarrow a\vec{u}\,\vec{v}+b\vec{v}\vec{v}=0\Rightarrow a(-1,2,3)(2,0,-1)+b(2,0,-1)(2,0,-1)=0$$

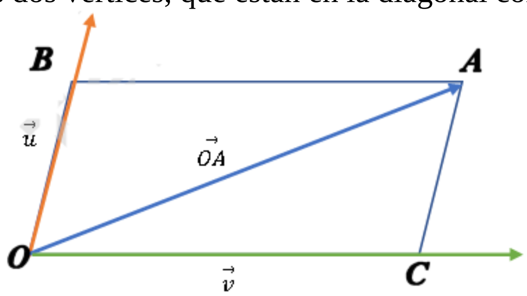
$$a(-2-3)+b(4+1)=0\Rightarrow -5a+5b=0\Rightarrow 5b=5a\Rightarrow a=b$$

El vector es $\overrightarrow{w_2}=a\vec{u}+a\vec{v}=a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\left((-1,2,3)+(2,0,-1)\right)=a(1,2,2)$ siendo $a\neq 0$

c) Al no ser los vectores paralelos, nos indican la dirección de cada uno de los lados adyacentes del paralelogramo.

La diagonal $\overrightarrow{OA}=(-4,4,7)$ significa que un vértice es O(0,0,0) y el otro es A(–4,4,7).

Falta determinar los otros dos vértices, que están en la diagonal contraria.



El vértice B es la intersección de la recta con dirección $\vec{u}$ que pasa por O y la recta que pasa por A con dirección $\vec{v}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\vec{u}=(-1,2,3)\\ O(0,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-t'\\ y=2t'\\ z=3t'\end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l}\vec{v}=(2,0,-1)\\ A(-4,4,7)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=-4+2t\\ y=4\\ z=7-t\end{array}\right\} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}-4+2t=-t'\\ 4=2t'\\ 7-t=3t'\end{array}\right\} \Rightarrow t'=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-4+2t=-2\\ 7-t=6\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2t=2\\ t=1\end{array}\right\} \Rightarrow t=1$$

$$\left.\begin{array}{l}x=-4+2=-2\\ y=4\\ z=7-1=6\end{array}\right\}$$

El tercer vértice tiene coordenadas B(–2,4,6).

El cuarto vértice C lo obtenemos sumando el vector $\overrightarrow{BO}$ al punto A.

$$C=\overrightarrow{BO}+A=(2,-4,-6)+(-4,4,7)=(-2,0,1)$$

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8% de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43% de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

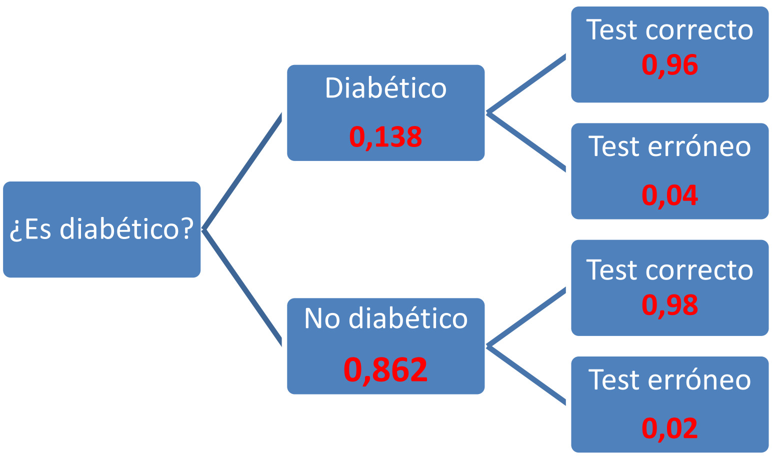
b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96% de los casos positivos de diabetes, pero da un 2% de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

a)

P(Sea diabético y lo sepa) = P(Sea diabético) · P(Lo sabe / Es diabético) = 0,138 · 0,57=0,078

P(No diabético o No sepa que es) = 1 – P(diabético y lo sabe) = 1 – 0,078 = 0,922

b) Realicemos un diagrama de árbol para resolver este problema



$$P(\text{Diabético / Test da diabético})=\frac{P(\text{Diabético y Test da diabético})}{P(\text{Test da diabético})}=$$

$$=\frac{0,138\cdot 0,96}{0,138\cdot 0,96+0,862\cdot 0,02}=\boxed{0,885}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.
En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Sea x = número de días en Francia, y = número de días en Alemania y z = número de días en Suiza.
El viaje ha durado 15 días → x + y +z = 15
Han estado en Francia el doble de días que en Suiza → x = 2z
El total del viaje ha sido 765 € → 20x+ 20x+ 8x + 25y + 15y + 8y + 30z + 25z + 8z = 765
Resolvamos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ x=2z \\ 48x+48y+63z=765 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+y+z=15 \\ 96z+48y+63z=765 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=15-3z \\ 159z+48y=765 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 159z+48(15-3z)=765 \Rightarrow 159z+720-144z=765 \Rightarrow$$

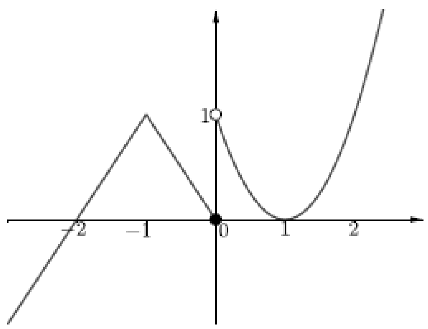
$$\Rightarrow 15z=45 \Rightarrow \boxed{z=\frac{45}{15}=3}$$

$$\boxed{x=2\cdot 3=6}$$

$$\boxed{y=15-3\cdot 3=15-9=6}$$

Han estado 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y=f(x)$.
Usando la información de la figura, se pide:
a) (0.5 puntos) Indicar los valores de *f(–1)* y *f ´((1)*.
b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si *f* es continua en los puntos x = –1 y x = 0.
c) (0.5 puntos) Indicar razonadamente si *f* es derivable en los puntos x = –1 y x = 0.
d) (0.5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$.

a) $f(-1)=1$. Como en x = 1 hay un mínimo $f\,'(1)=0$.

b) Es continua en x = –1 ya que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1=\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Es discontinua en x = 0 ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\neq 1=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

c) *f(x)* no es derivable en x = 1 pues presenta un pico. Las derivadas laterales son distintas.
$f\,'(-1^-)=1\ y\ f\,'(-1^+)=-1$.
Tampoco es derivable en x = 0 ya que no es continua en x = 0.

d) La integral definida de x = –2 hasta x = 0 es el área entre la función y el eje X. Esta área es un triángulo de base 2 y altura 1. Esta área vale 2/2 =1.

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = 1$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dados el punto P(0,–1, 1) y la recta r, que pasa por el punto Q(1, 0, 1) y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0.5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1.5 puntos) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

a)
El plano que contiene a r y que contiene al punto P(0,–1,1) tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\overrightarrow{PQ}=(1,0,1)-(0,-1,1)=(1,1,0)$. Su ecuación implícita es:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y+2-z+1-2x=0 \Rightarrow \boxed{-2x+2y-z+3=0}$$

b) La recta r tiene ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}=(0,1,2) \\ Q(1,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=t \\ z=1+2t \end{matrix}\right\}$$

Si S es un punto de r tiene coordenadas $S(1,t,1+2t)$ y el vector $\overrightarrow{SP}=(0,-1,1)-(1,t,1+2t)=(-1,-1-t,-2t)$ es perpendicular al vector $\vec{v}=(0,1,2)$, por lo que su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (-1,-1-t,-2t)\cdot(0,1,2)=0 \Rightarrow -1-t-4t=0 \Rightarrow -5t=1 \Rightarrow t=-\frac{1}{5}$$

$$S(1,t,1+2t)=\left(1,-\frac{1}{5},1-\frac{2}{5}\right)=\left(1,-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$$

c) Averigüemos las coordenadas de los puntos T_1, T_2.

$$T_1(1,t,1+2t); \quad T_2(1,t',1+t')$$

$$\overrightarrow{T_1P}=(0,-1,1)-(1,t,1+2t)=(-1,-1-t,-2t)$$

$$d(T_1,P)=\sqrt{5} \Rightarrow \left|\overrightarrow{T_1P}\right|=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{1+(1+t)^2+4t^2}=\sqrt{5} \Rightarrow$$

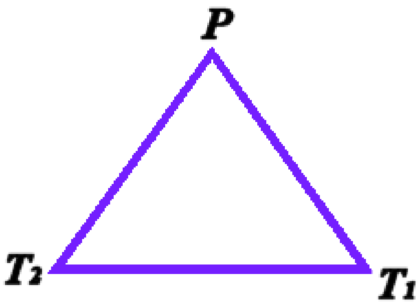
$$\Rightarrow 1+1+t^2+2t+4t^2=5 \Rightarrow 5t^2+2t-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{10}=\frac{-2\pm 8}{10}=\begin{cases} t=\dfrac{-2+8}{10}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5} \\ t'=\dfrac{-2-8}{10}=\dfrac{-10}{10}=-1 \end{cases}$$

$$t=\frac{3}{5}\Rightarrow T_1\left(1,t,1+2t\right)=\left(1,\frac{3}{5},1+\frac{6}{5}\right)=\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)$$

$$t'=-1\Rightarrow T_2\left(1,t',1+2t'\right)=\left(1,-1,1-2\right)=\left(1,-1,-1\right)$$

El área del triángulo



Es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PT_1}$ y $\overrightarrow{PT_2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PT_1}=\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)-\left(0,-1,1\right)=\left(1,\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)\\ \overrightarrow{PT_2}=\left(1,-1,-1\right)-\left(0,-1,1\right)=\left(1,0,-2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 8/5 & 6/5\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\frac{-16}{5}i+\frac{6}{5}j-\frac{8}{5}k+2j$$

$$\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}=\frac{-16}{5}i+\frac{16}{5}j-\frac{8}{5}k=\left(\frac{-16}{5},\frac{16}{5},\frac{-8}{5}\right)$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}\right|}{2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{256}{25}+\frac{64}{25}}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{576}{25}}}{2}=\frac{\frac{24}{5}}{2}=\frac{24}{10}=2,4\,u^2$$

El área pedida vale $2,4\,u^2$.

<u>Ejercicio 4</u> : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu=8.5$ y desviación típica $\sigma=2.5$.
Se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular el valor a tal que $P\left(X\leq a\right)=0,05$.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9.3.

X = N(8.5, 2.5)

a) $$P\left(X\leq a\right)=\left\{Tipificamos\right\}=P\left(\frac{X-8.5}{2.5}\leq\frac{a-8.5}{2.5}\right)=P\left(Z\leq\frac{a-8.5}{2.5}\right)=0,05$$

Como es una probabilidad menor que 0,5 es un valor negativo, para poder buscarlo en la tabla lo pasamos a positivo.

$$P\left(X\leq a\right)=P\left(Z\leq\frac{a-8.5}{2.5}\right)=0,05\Rightarrow P\left(Z\geq-\frac{a-8.5}{2.5}\right)=0,05$$

$$P\left(Z\leq-\frac{a-8.5}{2.5}\right)=1-0,05=0,95$$

Buscando en la tabla $-\frac{a-8.5}{2.5}=1.645\Rightarrow -a+8.5=4.1125\Rightarrow a=8.5-4.1125=3.3875$

b)

$$P(8 < X < 9.3) = P(X < 9.3) - P(X < 8) = Tipificamos =$$

$$= P\left(\frac{X-8.5}{2.5} < \frac{9.3-8.5}{2.5}\right) - P\left(\frac{X-8.5}{2.5} < \frac{8-8.5}{2.5}\right) =$$

$$= P(Z < 0,32) - P(Z < -0.2) = P(Z < 0,32) - (1 - P(Z < 0.2)) =$$

$$= 0.6255 - (1 - 0.5793) = \boxed{0.2048}$$