UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para k = –1.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean *f* y *g* dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

f(1) = 1; f ´(1) = 2; g(1) = 3; g ´(1) = 4:

Dada $h(x) = f\left((x+1)^2\right)$, use la regla de la cadena para calcular *h ´(0)*. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule *k ´(1)*.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (senx)^4 (\cos x)^3\, dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = sen\ x$.)

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1, 3,–3) y C(–3,–1, 1), se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores a ∈ R se verifica $A^2-I=2A$.
b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.
c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $\left(AA^t\right)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos *t* días después de iniciarse el brote viene dado por una función *F(t)* tal que $F'(t)=t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función F(t).
b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y-z=0\\ x+y+z=2\end{cases}$ y $s\equiv(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)$

, con λ∈ R, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P(1, 2, 3) respecto de π.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.
c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para k = –1.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$A = \begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 + 1 - k^2 + k - k = -2k^2 + 2$$

Si igualamos a cero el determinante → $|A| = 0 \Rightarrow -2k^2 + 2 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = 1;\ k = -1$

Distinguiremos tres casos diferentes en la resolución del sistema.

CASO 1. $k \neq 1;\ k \neq -1$

El rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada e igual al número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $k = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ \boxed{y = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4 + z = 0 \\ -x + 2 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -4 \\ -x - z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -4 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE, pues x + z no puede tomar dos valores diferentes. No tiene solución

CASO 3. $k = -1$

El sistema queda

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a \text{ - Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} -x & -y & -z & = 0 \\ x & & -z & = 0 \\ \hline & -y & -2z & = 0 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a \text{ - } 2 \cdot \text{ Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} -2x & -y & & = 0 \\ 2x & & -2z & = 0 \\ \hline & -y & -2z & = 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.
Tiene infinitas soluciones x = z; y = –2z; z = z

b) Para k = –1 está resuelto en el apartado anterior.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean *f* y *g* dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

f(1) = 1; f ´(1) = 2; g(1) = 3; g ´(1) = 4:

Dada $h(x)=f\left((x+1)^2\right)$, use la regla de la cadena para calcular *h ´(0)*. Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule *k ´(1)*.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (senx)^4(\cos x)^3\,dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = sen\ x$.)

a) Si $h(x)=f\left((x+1)^2\right)$ su derivada es $h'(x)=f'\left((x+1)^2\right)\cdot 2(x+1)$, luego

$$h'(0)=f'\left((1)^2\right)\cdot 2(0+1)=2\cdot f'(1)=2\cdot 2=\boxed{4}$$

Si $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ su derivada es $k'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, luego

$$k'(1)=\frac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$\int (senx)^4(\cos x)^3\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=senx\Rightarrow dt=\cos x dx\\ dx=\dfrac{dt}{\cos x}\end{array}\right\}=\int t^4(\cos x)^3\frac{dt}{\cos x}=\int t^4(\cos x)^2\,dt=$$

b) $$=\int t^4\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)dt=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=\int t^4-t^6dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos cambio}\\ t=senx\end{array}\right\}=$$

$$=\boxed{\frac{sen^5x}{5}-\frac{sen^7x}{7}+C}$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los puntos A(1, 1, 1), B(1, 3,–3) y C(–3,–1, 1), se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

a) Necesitamos las coordenadas de los vectores que unen los puntos

$\overrightarrow{AB}=(1,3,-3)-(1,1,1)=(0,2,-4)$ y $\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)-(1,1,1)=(-4,-2,0)$

Estos vectores no son proporcionales por lo que definen un plano de ecuación

$$\left.\begin{array}{l}A(1,1,1)\\ \overrightarrow{AB}=(0,2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 16y-16+8z-8-8x+8=0$$

$$-8x+16y+8z-16=0\Rightarrow\boxed{-x+2y+z-2=0}$$

La ecuación del plano es $-x+2y+z-2=0$.

b) Un punto D tal que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes hay infinitos, cualquier punto del plano anterior cumple esta condición. Probemos con el punto D(0,0,2) del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,-2,0)\\ \overrightarrow{AD}=(0,0,2)-(1,1,1)=(-1,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-16+8+8=0$$

Lo cual demuestra la dependencia lineal de los vectores.

c) El punto P del eje OX debe tener coordenadas P(a, 0, 0) y el volumen del tetraedro con vértices A, B, C y P se calcula:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,-2,0)\\ \overrightarrow{AP}=(a,0,0)-(1,1,1)=(a-1,-1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Volumen tetraedro ABCP}=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\\ a-1 & -1 & -1\end{vmatrix}\right|$$

$$\text{Volumen tetraedro ABCP}=\left|\frac{-16-8a+8-8}{6}\right|=\left|\frac{-16-8a}{6}\right|$$

Caben dos posibilidades:

$$\left|\frac{-16-8a}{6}\right|=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-16-8a}{6}=1\Rightarrow -16-8a=6\Rightarrow -8a=22\Rightarrow a=-\dfrac{22}{8}=-\dfrac{11}{4}\\ \dfrac{-16-8a}{6}=-1\Rightarrow -16-8a=-6\Rightarrow -8a=10\Rightarrow a=-\dfrac{10}{8}=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Los puntos solución del problema son $P\left(-\frac{11}{4},0,0\right)$ y $P'\left(-\frac{5}{4},0,0\right)$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación X ≤ 8.2 es 0.67, calcule σ.

a) Sea X = número de amigos seleccionados. Se trata de una variable binomial, siendo 8 las repeticiones y $p=0,40$.

Nos piden

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)=$$

$$=1-\left(\binom{8}{0}0,4^0 0,6^8+\binom{8}{1}0,4^1 0,6^7\right)=1-\left(0,6^8+8\cdot 0,4\cdot 0,6^7\right)=\boxed{0,8936}$$

b) X = puntuaciones obtenidas. X = N(5.6, σ).

$P(X\leq 8.2)=0,67\Rightarrow$ Tipificamos la variable

$$P\left(\frac{X-5.6}{\sigma}\leq\frac{8.2-5.6}{\sigma}\right)=0,67$$

$$P\left(Z \leq \frac{2.6}{\sigma}\right) = 0,67$$

Buscando en la tabla de la normal N(0,1) encontramos que

$$\frac{2.6}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow 2.6 = 0.44\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2.6}{0.44} = 5.91}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores a ∈ R se verifica $A^2-I=2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $\left(AA^t\right)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a)

$$A^2-I=2A\Rightarrow\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(1-a)^2+1 & 1-a+1+a\\ 1-a+1+a & 1+(1+a)^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2a & 2\\ 2 & 2+2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+a^2-2a+1 & 2\\ 2 & 1+1+a^2+2a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2a & 2\\ 2 & 2+2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2+a^2-2a-1 & 2\\ 2 & 2+a^2+2a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2a & 2\\ 2 & 2+2a\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}a^2-2a+1=2-2a\\ 2=2\\ 2=2\\ 1+a^2+2a=2+2a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2=1\\ a^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow a=1;\ a=-1$$

Se cumple para $a=1$ o $a=-1$

b) La matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{vmatrix}=1-a^2-1=-a^2$$

Es nulo cuando a = 0. En el resto de casos la matriz A es invertible. Calculemos su inversa con la fórmula;

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}}{-a^2}=\frac{\begin{pmatrix}1+a & -1\\ -1 & 1-a\end{pmatrix}}{-a^2}=\begin{pmatrix}\frac{1+a}{-a^2} & \frac{-1}{-a^2}\\ \frac{-1}{-a^2} & \frac{1-a}{-a^2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2}\\ \frac{1}{a^2} & \frac{-1+a}{a^2}\end{pmatrix}}$$

c)

$$\left(AA^t\right)^2=\left(\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & 1\\ 1 & 1+a\end{pmatrix}\right)^2=\left(\begin{pmatrix}2-2a+a^2 & 2\\ 2 & 2+2a+a^2\end{pmatrix}\right)^2=$$

$$=\begin{pmatrix}2-2a+a^2 & 2\\ 2 & 2+2a+a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-2a+a^2 & 2\\ 2 & 2+2a+a^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4-4a+2a^2-4a+4a^2-2a^3+2a^2-2a^3+a^4+4 & 4-4a+2a^2+4+4a+2a^2\\ 4-4a+2a^2+4+4a+2a^2 & 4+4+4a+2a^2+4a+4a^2+2a^3+2a^2+2a^3+a^4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a^4-4a^3+8a^2-8a+8 & 8+4a^2\\ 8+4a^2 & a^4+4a^3+8a^2+8a+8\end{pmatrix}$$

$$\left|\left(AA^t\right)^2\right|=\begin{vmatrix}a^4-4a^3+8a^2-8a+8 & 8+4a^2\\ 8+4a^2 & a^4+4a^3+8a^2+8a+8\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a^4-4a^3+8a^2-8a+8\right)\left(a^4+4a^3+8a^2+8a+8\right)-\left(8+4a^2\right)\left(8+4a^2\right)=$$

$$=a^8+4a^7+8a^6+8a^5+8a^4-4a^7-16a^6-32a^5-32a^4-32a^3\text{........}$$

$$=\boxed{a^8}$$

Otra forma de hacerlo es aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\left|\left(AA^t\right)^2\right|=\left\{\text{Sabemos que }\left|B^2\right|=\left|B\right|^2\right\}=\left|AA^t\right|^2=$$

$$=\left\{\text{Sabemos que }\left|A\cdot B\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|\right\}=\left(\left|A\right|\left|A^t\right|\right)^2=$$

$$=\left\{\text{Sabemos que }\left|B^t\right|=\left|B\right|\right\}=\left(\left|A\right|\left|A\right|\right)^2=\left(\left(-a^2\right)\left(-a^2\right)\right)^2=a^8$$

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos *t* días después de iniciarse el brote viene dado por una función *F(t)* tal que $F'(t)=t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función F(t).

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

a)

$$F'(t)=t^2(10-t)\Rightarrow F(t)=\int F'(t)\,dt=\int t^2(10-t)\,dt=\int 10t^2-t^3dt$$

$$F(t)=20\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+C$$

Como sabemos que *F(0)=6* entonces $F(0)=20\frac{0^3}{3}-\frac{0^4}{4}+C=6\Rightarrow C=6$

Mi función es $F(t)=20\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+6$

b) Buscamos un máximo de la función $F(t)=20\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+6$, para ello obtenemos su derivada y la igualamos a cero.

$$F'(t)=t^2(10-t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ 10-t=0\Rightarrow t=10\end{cases}$$

Comprobemos cual es el máximo,

$F'(t) = t^2(10-t) = 10t^2 - t^3 \Rightarrow F''(t) = 20t - 3t^2$

Como $F''(0) = 0 \Rightarrow$ No sabemos si es máximo o mínimo, pero

$F'''(t) = 20 - 6t \Rightarrow F'''(0) = 20 \neq 0$

Como $F''(10) = 200 - 300 = -100 < 0 \Rightarrow$ Es máximo

$F(10) = 20\frac{10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = 839$

Al cabo de 10 días se alcanza el máximo de enfermos, y esta cantidad es 839 enfermos.

c) Como F(13) = 189,08 y F(14) = – 451,33. Según el teorema de Bolzano en el intervalo (13,14) hay un momento c en el que F(c) = 0. Por lo tanto el brote acaba a los 14 días.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x+3y-z=4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$,

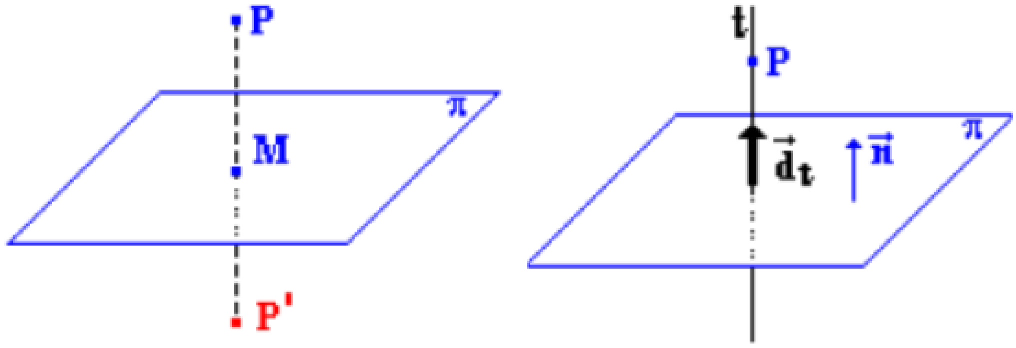
con λ∈ R, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P(1, 2, 3) respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

a) Hallemos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano, para ello utilizamos el vector normal del plano como vector director de la recta.



$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-z=4 \Rightarrow \vec{n} = \vec{v_r} = (2,3,-1) \\ \text{Pasa por el punto } P(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases}$$

Hallemos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+3y-z=4 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3-t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+2t)+3(2+3t)-(3-t)=4 \Rightarrow 2+4t+6+9t-3+t=4$$

$$14t+5=4 \Rightarrow t = \frac{-1}{14}$$

$$\begin{cases} x=1+2\cdot\frac{-1}{14} \\ y=2+3\cdot\frac{-1}{14} \\ z=3-\frac{-1}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\frac{-2}{14}=\frac{12}{14} \\ y=2+\frac{-3}{14}=\frac{25}{14} \\ z=3+\frac{1}{14}=\frac{43}{14} \end{cases}$$

El punto M tiene coordenadas $M\left(\frac{12}{14},\frac{25}{14},\frac{43}{14}\right)$

Como M es el punto medio del segmento de extremos P y P´ se cumple que:

$$\frac{P+P´}{2}=M \Rightarrow P+P´=2M \Rightarrow P´=2M-P$$

$$P´=2\left(\frac{12}{14},\frac{25}{14},\frac{43}{14}\right)-(1,2,3)=\left(\frac{24}{14}-1,\frac{50}{14}-2,\frac{86}{14}-3\right)=\left(\frac{10}{14},\frac{22}{14},\frac{44}{14}\right)=\left(\frac{5}{7},\frac{11}{7},\frac{22}{7}\right)$$

b) Hallemos el punto intersección de las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s\equiv(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \\ s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda+2-3-\lambda=0 \\ 1+\lambda+2+3+\lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 2\lambda=-4 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

El punto de intersección es Q(–1, 2, 1). Como la recta debe ser perpendicular al plano $\pi\equiv 2x+3y-z=4$ su vector director debe ser el normal al plano $\vec{n}=\vec{v_t}=(2,3,-1)$.

La ecuación se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_t}=(2,3,-1) \\ \text{Pasa por } Q(-1,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow t\equiv\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}$$

c) El ángulo entre las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s\equiv(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)$ es el ángulo entre sus vectores directores.

$$v_s=(1,0,1) \text{ y } v_r=(1,1,-1)\times(1,1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i-j+k-k-j+i=2i-2j=(2,-2,0)$$

Ángulo entre r y s = Ángulo entre $v_s=(1,0,1)$ y $v_r=(2,-2,0)$.

$$\cos\left(\vec{v_r},\vec{v_s}\right)=\frac{\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}}{\left|\vec{v_r}\right|\cdot\left|\vec{v_s}\right|}=\frac{(2,-2,0)(1,0,1)}{\sqrt{4+4}\sqrt{1+1}}=\frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{16}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\vec{v_r},\vec{v_s}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{v_r},\vec{v_s}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^{\circ}$$

Las rectas *r* y *s* forman un ángulo de 60º.

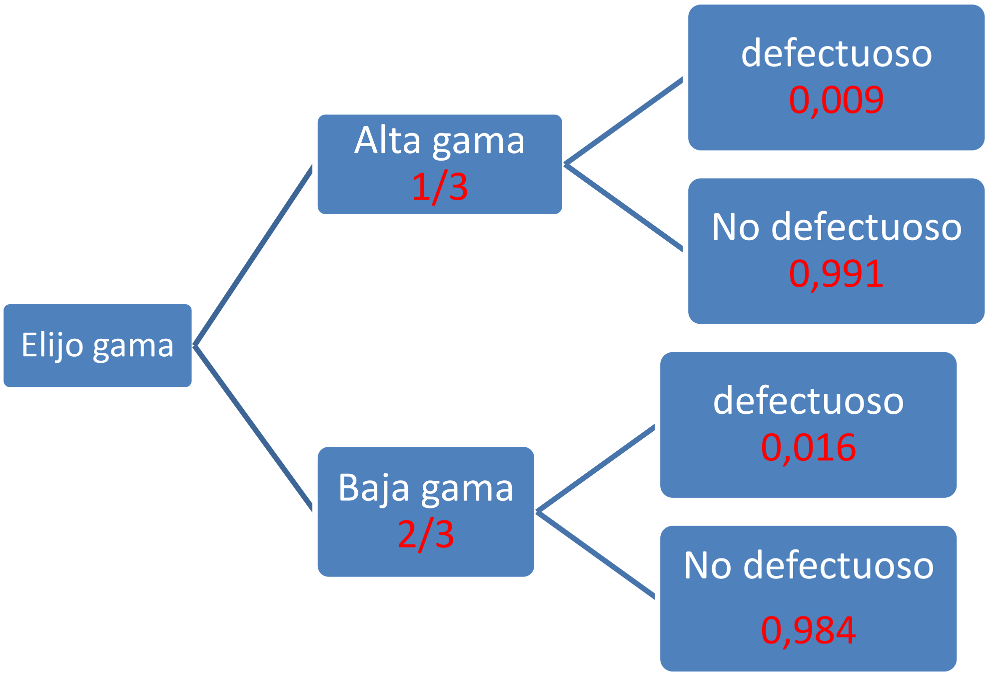
Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Realicemos un diagrama de árbol para facilitar el cálculo de probabilidades.



a)

$$P(\textit{defectuoso}) = P(\textit{alta gama}) \cdot P(\textit{defectuoso siendo de alta gama}) +$$
$$+P(\textit{baja gama}) \cdot P(\textit{defectuoso siendo de baja gama}) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 0,009 + \frac{2}{3} \cdot 0,016 = 0,0137 = \boxed{1,37\,\%}$$

b)

$$P(\textit{siendo defectuoso, que sea de gama baja}) = P(\textit{sea de gama baja / Sea defectuoso}) =$$
$$= \frac{P(\textit{sea de gama baja} \cap \textit{Sea defectuoso})}{P(\textit{Sea defectuoso})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,016}{0,0137} = 0,7805 = \boxed{78,05\,\%}$$