PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Junio 2010

MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A:

CUESTIÓN A.1: Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A. **[2.5 puntos]**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P=(1, 3, 0) de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto Q=(-2, 2, 1) y el vector v=(1, 1, 1). Calcular la distancia del punto P a la recta. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$, se pide:

i) Dominio y cortes con los ejes. **[0.5 puntos]**
ii) Estudio de simetrías y de regiones para el signo de f(x). **[0.5 puntos]**
iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas. **[0.5 puntos]**
iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. **[0.5 puntos]**
v) Representación gráfica aproximada. **[0.5 puntos]**

CUESTIÓN A.4: Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 4x^2 + 1$.
[2.5 puntos]

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: Enunciar el teorema de Rouche-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema siguiente tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema). **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=k \\ 3x-3y=0 \\ x+ky+3z=1 \end{array}\right\}$$

CUESTIÓN B.2: Comprobar que las rectas

$$r: x+1=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$$

y

$$s: \left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

no se cortan y no son paralelas. Calcular la distancia entre ellas. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN B.3: La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN B.4: Calcular la integral siguiente: $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$.

[2.5 puntos]

Soluciones Matemáticas PAU Junio 2010

OPCIÓN A:

CUESTIÓN A.1: Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ para determinar si es nulo o no, y por tanto si tiene inversa o no.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1-2+0-(0-2+0)=-1\neq 0$$

Tiene inversa y se calcula con la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)^T}{|A|}$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$Adj(A)^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)^T}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P=(1, 3, 0) de entre todos los puntos de la recta determinada por el punto Q=(-2, 2, 1) y el vector v=(1, 1, 1). Calcular la distancia del punto P a la recta.

Determinemos primero la ecuación de la recta que pasa por Q y tiene vector director $\vec{v}=(1,1,1)$:

$$\left.\begin{array}{l}Q(-2,2,1)\\ \vec{v}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\left.\begin{array}{l}x=-2+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right\}$$

El punto R de la recta ***r*** más cercano al P(1,3,0) es el punto de corte del plano π que pasa por P y es perpendicular a la recta ***r*** (su vector normal es el director de la recta). Determinemos la ecuación del plano π:

$\left.\begin{array}{l} P(1,3,0) \\ \vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z+D=0$ y como pasa por P(1,3,0) sustituimos en la ecuación anterior:

1+3+0+D=0 $\rightarrow D=-4$

El plano es $\pi: \ x+y+z-4=0$

El punto pedido es el de corte del plano π con la recta ***r***:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z-4=0 \\ \left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda+2+\lambda+1+\lambda-4=0 \Rightarrow 3\lambda=3 \Rightarrow \lambda=1$$

El punto pedido es $\left.\begin{array}{l} x=-2+1=-1 \\ y=2+1=3 \\ z=1+1=2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{R=(-1,3,2)}$

Y la distancia pedida es la distancia de P a R es decir:

$$\text{distancia}(P,R)=\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left\{\overrightarrow{PR}=(-1,3,2)-(1,3,0)=(-2,0,2)\right\}=\sqrt{(-2)^2+4}=\sqrt{8}$$

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x)=\sqrt{4+x^2}$, se pide:

i) Dominio y cortes con los ejes.
ii) Estudio de simetrías y de regiones para el signo de f(x).
iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas.
iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.
v) Representación gráfica aproximada.

i) Para calcular el dominio de la función $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ resolvemos la inecuación:

$4+x^2 \geq 0$

Planteamos la ecuación asociada: $4+x^2=0 \rightarrow x^2=-4 \rightarrow x=\sqrt{-4}$

Esta ecuación no tiene solución, luego $4+x^2$ siempre tiene el mismo signo, que es positivo.

$\boxed{\text{El dominio de la función es todo } \mathbb{R}}$

Los puntos de corte los obtengo resolviendo estas dos situaciones:

x=0 → $f(0)=\sqrt{4+0^2}=\sqrt{4}=2$ → $\boxed{\text{Punto de corte con eje de ordenadas (0, 2)}}$

y=0 → $0=\sqrt{4+x^2} \rightarrow 0^2=\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2 \rightarrow 0=4+x^2 \rightarrow$ No tiene solución → $\boxed{\text{No tiene punto de corte con el eje de abscisas}}$.

ii) $f(-x)=\sqrt{4+(-x)^2}=\sqrt{4+x^2}=f(x)$ La función es par.

La función siempre es positiva, luego hay una sola región válida por encima del eje de abcisas.

iii) Asíntotas verticales: x=a. No hay, ya que ningún valor de x está excluido del dominio.
Asíntotas horizontales: y=b. Calculemos el límite de la función cuando la x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+x^2}\right)=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+x^2}\right)=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

Tampoco tiene asíntotas horizontales.
Asíntotas oblicuas: y=mx+n.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1}=1$$

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4+x^2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+x^2}-1\cdot x=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)}{\sqrt{4+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{4+x^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{4+x^2}+x}=\frac{4}{\infty}=0$$

$$n'=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+x^2}+1\cdot x=\infty-\infty=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)}{\sqrt{4+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{4+x^2}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+x^2-x^2}{\sqrt{4+x^2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{4+x^2}-x}=\frac{4}{\infty}=0$$

Las asíntotas oblicuas tienen de ecuación **y = x** y la otra **y = – x**

iv) Calculemos su derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$f'(x)=0\to\frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}=0\to 2x=0\to x=0$$

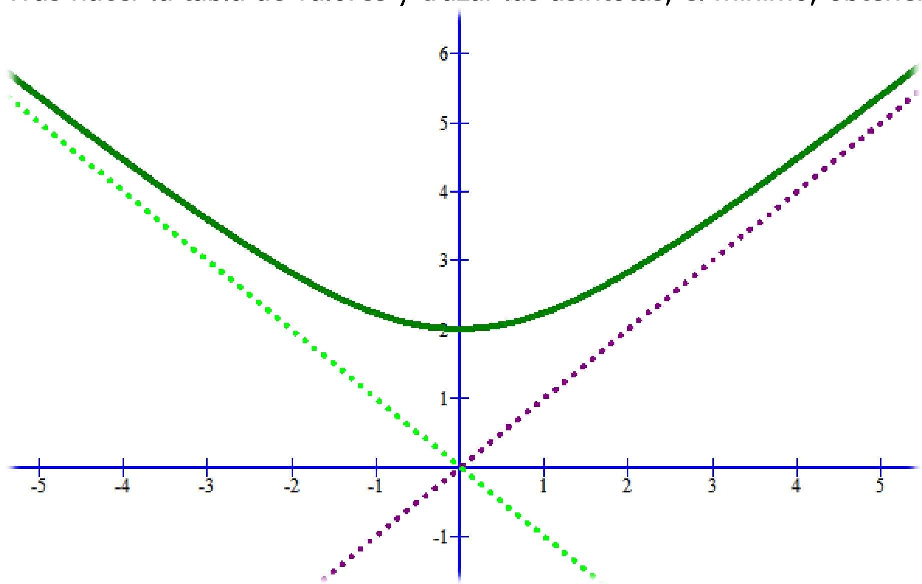
x=0 es el punto que permite separar los intervalos de crecimiento de los de decrecimiento. Estudiémoslo

Antes de x=0, por ejemplo para x=-1 → $f'(-1)=\frac{2\cdot(-1)}{\sqrt{4+(-1)^2}}=\frac{-2}{\sqrt{5}}<0$ La función decrece

Después de x=0, por ejemplo para x=1 → $f'(1)=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{4+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}>0$ La función crece

La función presenta un mínimo en x=0. Decrece en el intervalo $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$

v) Tras hacer la tabla de valores y trazar las asíntotas, el mínimo, obtenemos:



CUESTIÓN A.4: Calcular el área encerrada por las curvas $f(x)=x^3+x^2+2x+1$ **y** $g(x)=4x^2+1$

Comprobemos la situación relativa entre las dos gráficas:

$$x^3+x^2+2x+1=4x^2+1$$

$$x^3-3x^2+2x=0$$

$$x\left(x^2-3x+2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-3x+2=0\rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}x=\dfrac{3+1}{2}=2\\ x=\dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}\end{cases}$$

Las funciones f y g se cortan en tres puntos, luego el área tiene forma de ∞ y la calcularemos en dos partes:

$$\text{Área de zona 1}=\int_0^1\left(x^3+x^2+2x+1\right)-\left(4x^2+1\right)dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\left(\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right)-\left(\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right)=\frac{1}{4}$$

$$\text{Área de zona 2}=\int_1^2\left(x^3+x^2+2x+1\right)-\left(4x^2+1\right)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=\left(\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right)=4-8+4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$$

El área total es la suma de los valores absolutos de los resultados obtenidos= $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: Enunciar el teorema de Rouche-Fröbenius. Aplicar dicho teorema para discutir si el sistema siguiente tiene solución y si la solución es única en función de los posibles valores del parámetro k (no es necesario resolver el sistema).

$$\left.\begin{array}{l}x-y+z=k\\ 3x-3y=0\\ x+ky+3z=1\end{array}\right\}$$

Consideremos la matriz de coeficientes asociada a dicho sistema:

$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-3&0\\1&k&3\end{pmatrix}$ y calculemos su determinante $\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&-3&0\\1&k&3\end{vmatrix}=-9+0+3k-\left(-3-9\right)=3+3k$

Si lo igualamos a cero, obtenemos que k debe ser -1.

Estudiemos los dos casos posibles: k=-1 y k≠-1

$\boxed{\text{Si k=-1}}$

El rango de $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&-3&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$ es 2 ya que el menor $\begin{vmatrix}-1&1\\-3&0\end{vmatrix}=3\neq0$

El rango de la ampliada $Am = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)$ es 3 ya que el menor de orden 3 que resulta de suprimir la columna 1ª es no nulo $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+3-(0-3+0) = 6 \neq 0$

El sistema es incompatible para k=-1

$\boxed{\text{Si } k\neq -1}$

El rango de la matriz A es 3, que es su valor máximo y por tanto el de la ampliada también es 3. También es igual al número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado para k≠-1

CUESTIÓN B.2: Comprobar que las rectas

$$r: x+1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3} \qquad y \qquad s: \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{array}\right\}$$

no se cortan y no son paralelas. Calcular la distancia entre ellas.

Los vectores directores de ambas rectas $\vec{v_r} = (1,2,3)$ y $\vec{v_s} = (1,1,-1)$ no son proporcionales $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1}$ por lo que no son paralelas.

Para averiguar si se cortan o se cruzan con un punto de cada recta $P_r = (-1,-2,1)$ y $P_s = (0,1,2)$ obtenemos un tercer vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,2)-(-1,-2,1) = (1,3,1)$. Comprobemos el valor del determinante formado por $\vec{v_r} = (1,2,3)$, $\vec{v_s} = (1,1,-1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,3,1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-2+9-(3+2-3) = 8-2 = 6 \neq 0$ Luego los tres vectores no son coplanarios y por tanto las rectas r y s se cruzan.

La distancia entre ambas rectas es la distancia de un punto de una de las rectas (por ejemplo r) al plano paralelo a r que contiene a la recta s.

Este plano paralelo a r tendrá como vector director el de r $\vec{v_r} = (1,2,3)$ y como contiene a la recta s también tiene como vector director el de la recta s $\vec{v_s} = (1,1,-1)$ y contiene el punto $P_s = (0,1,2)$:

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} P_s(0,1,2) \\ v_s(1,1,-1) \\ v_r(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x-y+1+2z-4-(z-2+3y-3-2x) = 0$$

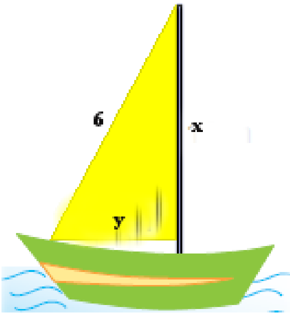
$\pi: 3x-y+1+2z-4-z+2-3y+3+2x = 0$

$\pi: 5x-4y+z+2 = 0$

La distancia del punto $P_r = (-1,-2,1)$ al plano π se obtiene con la fórmula:

$$\boxed{\text{Distancia}(P_r,\pi) = \frac{|5\cdot(-1)-4\cdot(-2)+1+2|}{\sqrt{5^2+(-4)^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{42}}}$$

CUESTIÓN B.3: La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Sabiendo que la hipotenusa debe medir 6 metros, calcular sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.



Por el teorema de Pitágoras: $6^2 = x^2 + y^2 \to 36 - x^2 = y^2 \to y = \sqrt{36 - x^2}$

El área de la vela valdrá:

$$f(x,y) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{2}$$

Debemos maximizar la función $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{2}$ que la podemos transformar un poco para que sea más sencilla su derivada y no aplicar la derivada del producto, dejándola así:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(36 - x^2\right)}}{2} = \frac{\sqrt{36x^2 - x^4}}{2}$$

Calculemos su derivada e igualemosla a 0

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{36x^2 - x^4}} \cdot \left(72x - 4x^3\right) = \frac{72x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{36x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{72x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{36x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 72x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x\left(72 - 4x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 72 - 4x^2 = 0 \to \frac{72}{4} = x^2 \to \boxed{x = \sqrt{18}} \end{cases}$$

X=0. Rechazamos el valor x=0 ya que implica una vela sin área, no habría vela.

$x = \sqrt{18} \simeq 4'24$. Si comprobamos el signo de la derivada antes de ese valor, por ejemplo en x=4:

$$f'(4) = \frac{72 \cdot 4 - 4 \cdot 4^3}{2 \cdot \sqrt{36 \cdot 4^2 - 4^4}} = \frac{288 - 256}{+} = \frac{+32}{+} > 0$$

La función es creciente antes de $x = \sqrt{18}$

Si comprobamos el signo de la derivada después de ese valor, por ejemplo en x=5:

$$f'(5) = \frac{72 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{2 \cdot \sqrt{36 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{360 - 500}{+} = \frac{-140}{+} < 0$$

La función es decreciente antes de $x = \sqrt{18}$

En $x = \sqrt{18}$ la función presenta un máximo

Las dimensiones de la vela con superficie máxima, sometiéndola a las restricciones dadas en el ejercicio son de medidas de catetos $x = \sqrt{18}$ e $y = \sqrt{36 - \sqrt{18}^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18}$

CUESTIÓN B.4: Calcular la integral siguiente: $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$.

Calculemos primero la integral indefinida correspondiente a esta integral definida $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx$:

Antes realicemos la división de polinomios:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & & x^2 - x - 2 \\ \hline -x^2 & +x & +2 & 1 \\ \hline & x & +2 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = \int 1+\frac{x+2}{x^2-x-2}dx = \int dx + \int \frac{x+2}{x^2-x-2}dx = ...$$

Descomponemos la fracción en fracciones simples:

$$x^2-x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-x-2} = \frac{A\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{B\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x+1)}{x^2-x-2}$$

$$x+2 = A\cdot(x-2)+B\cdot(x+1)$$

Si doy el valor 2 a x $\rightarrow$ 4=3B $\rightarrow$ B=$\frac{4}{3}$

Si doy el valor -1 a x $\rightarrow$1=-3A $\rightarrow$ A=$\frac{-1}{3}$

Así

$$\int dx + \int \frac{x+2}{x^2-x-2}dx = x + \int \frac{-1/3}{x+1}dx + \int \frac{4/3}{x-2}dx = x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-2}dx = x - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-2| + C$$

Calculemos ahora la integral definida:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = \left[x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{4}{3}\ln|x-2|\right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{3}\ln|1+1|+\frac{4}{3}\ln|1-2|\right)-\left(0-\frac{1}{3}\ln|0+1|+\frac{4}{3}\ln|0-2|\right)=$$

$$=\left(1-\frac{\ln 2}{3}+\frac{4\ln 1}{3}\right)-\left(-\frac{\ln 1}{3}+\frac{4\ln 2}{3}\right) = 1-\frac{\ln 2}{3}-\frac{4\ln 2}{3} = \boxed{1-\frac{5\ln 2}{3}}$$