PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Septiembre 2010
MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A:

CUESTIÓN A.1: Definición de rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro k. **[2.5 puntos]**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P=(1,0,-1) de entre todos los puntos del plano determinado por los puntos Q=(2,2,1), R=(0,1,2) y S=(0,0,1). Calcular la distancia de punto P al plano. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x)=\dfrac{x+1}{4-x^2}$, se pide:

i) Dominio y cortes con los ejes. **[0.5 puntos]**
ii) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales. **[0.5 puntos]**
iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas y calcularlas. **[0.5 puntos]**
iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos. **[0.5 puntos]**
v) Representación gráfica aproximada. **[0.5 puntos]**

CUESTIÓN A.4: Enunciar el teorema fundamental del cálculo integral y calcular la integral siguiente:

$\int \dfrac{x^2}{x^2-9}dx$ **[2.5 puntos]**

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: Discutir y resolver el sistema siguiente en función de los posibles valores del parámetro k. **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \\ x-y+z=k \end{array}\right\}$$

CUESTIÓN B.2: Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r: x+1=y=1-z$$

y

$$s: \left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

y calcular la distancia entre ellas. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN B.3: Definición de derivada de una función en un punto. Demostrar que la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN B.4: Calcular el área de la región delimitada por el eje x y la función $f(x)=x-\sqrt{x}$.
[2.5 puntos]

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1: Definición de rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro k.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$$

Tomemos un menor de orden 3 en el que no aparezca k (el formado por las tres primeras filas de la matriz A) y comprobemos si es nulo o no.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=0+1+0-(-2+0+3)=0$$

Suprimamos la 3ª fila, que es la suma de las dos primeras. El rango solo puede ser 3 si el menor formado por la 1ª, 2ª y 4ª fila es no nulo. Averigüemos cuando ocurre esto.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix}=2k+1+0-(-2+0+1)=2k+2$$

Es nulo cuando $2k+2=0\to 2k=-2\to k=-1$

Consideremos estos dos casos diferentes, cuando k=-1 y cuando k≠-1.

$\boxed{\text{K}\neq-1}$

Entonces el menor de orden 3 es no nulo y por tanto el rango de A es 3

$\boxed{\text{K}=-1}$

El rango de A es menor de 3 al ser el menor nulo. Como $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$. He podido elegir un menor de orden 2 no nulo, el rango es 2

CUESTIÓN A.2: Calcular el punto más cercano al punto P=(1,0,-1) de entre todos los puntos del plano determinado por los puntos Q=(2,2,1), R=(0,1,2) y S=(0,0,1). Calcular la distancia de punto P al plano.

Calculemos la ecuación del plano QRS. Para ello necesitamos un punto, por ejemplo S(0, 0, 1) y dos vectores directores, por ejemplo QR y QS:

$$\left.\begin{array}{l}S(0,0,1)\\ \overrightarrow{QR}=(0,1,2)-(2,2,1)=(-2,-1,1)\\ \overrightarrow{QS}=(0,0,1)-(2,2,1)=(-2,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-0 & y-0 & z-1\\ -2 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 0-2y+4z-4-(2z-2+0-2x)=0$$

$$-2y+4z-4-2z+2+2x=0\Rightarrow 2x-2y+2z-2=0$$

La ecuación del plano QRS queda, al simplificar dividiendo entre 2: $x-y+z-1=0$

Para determinar el punto de esta plano más cercano a P(1,0,-1), calculemos la recta perpendicular al plano que pasa por P y después el punto de corte de esta recta con el plano será el punto pedido.

Recta perpendicular a QRS tiene como vector director el normal al plano, es decir, $\vec{v} = (1,-1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,-1) \\ \vec{v} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 0-\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array}\right\}$$

Resolvamos el sistema planteado por esta ecuación de la recta y la ecuación del plano para determinar el punto de corte de ambos:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z-1=0 \\ \left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=0-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+\lambda-1+\lambda-1=0 \Rightarrow 3\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

El punto pedido es $T = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

La distancia de P al plano QRS se puede hallar de dos maneras:
Primera:

$$Distancia\left(P(1,0,-1), QRS: x-y+z-1=0\right) = \frac{|1-0-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Segunda:

$$Distancia\left(P(1,0,-1), QRS\right) = \text{Distancia(P,T)}=\left|\overrightarrow{PT}\right| = \left\{\overrightarrow{PT} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right) - (1,0,-1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{4-x^2}$ **, se pide:**

i) Dominio y cortes con los ejes.
ii) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales.
iii) Estudiar si existen asíntotas horizontales u oblicuas y calcularlas.
iv) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.
v) Representación gráfica aproximada.

i) $4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$ El Dominio es $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$

$x=0 \to f(0)=\frac{0+1}{4-0^2}=\frac{1}{4}$ Con el eje de ordenadas el punto de corte es P(0, 0'25)

$y=0 \to 0=\frac{x+1}{4-x^2} \to 0=x+1 \to x=-1$ Con el eje de abscisas el punto de corte es Q(-1, 0)

ii) Asíntotas verticales: x=a. Hay dos: x=2 ; x=-2.

Asíntotas horizontales: y=b. Calculemos el límite de la función cuando la x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{4-x^2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{4-x^2}=0$$

La asíntota horizontal es y=0.
Asíntotas oblicuas: y=mx+n.
No hay, pues tiene una asíntota horizontal.

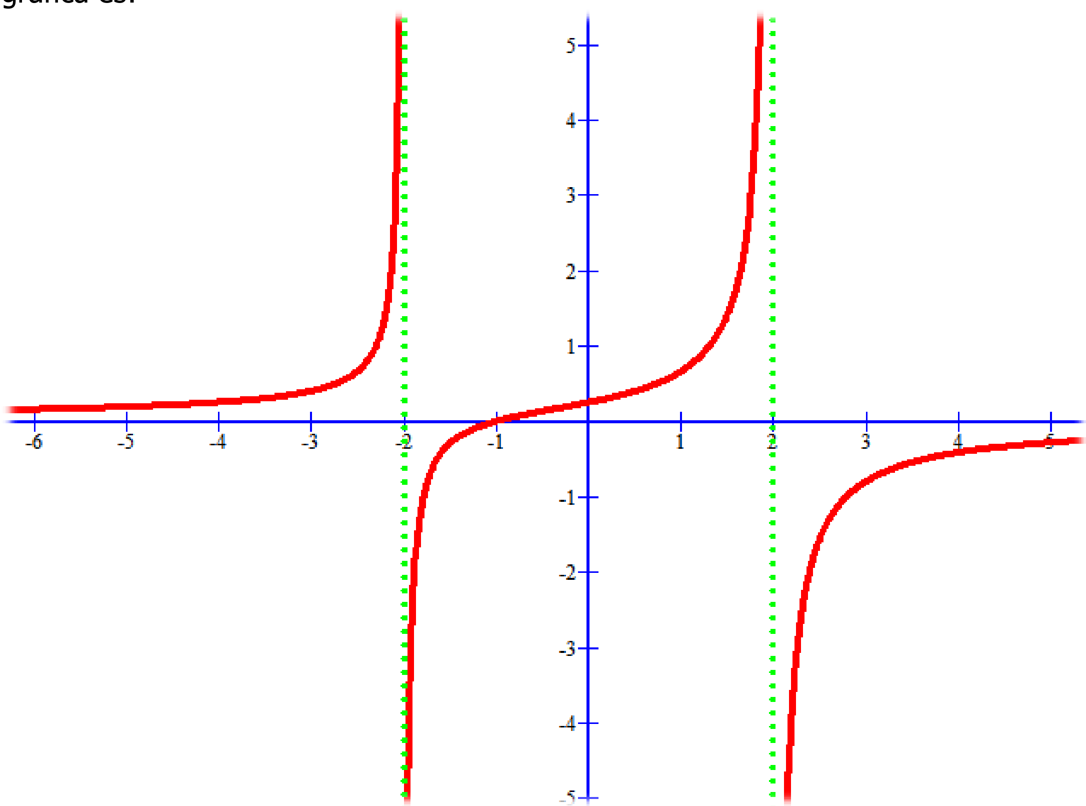
iii) Calculemos su derivada:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(4-x^2\right)-(-2x)\cdot(x+1)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{4-x^2+2x^2+2x}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{x^2+2x+4}{\left(4-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0\to\frac{x^2+2x+4}{\left(4-x^2\right)^2}=0\to x^2+2x+4=0\to x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}=\text{No tiene solución}$$

La función no presenta puntos críticos y el signo de la derivada siempre es positivo, luego la función siempre es creciente

iv) Haciendo la tabla de valores, representando las asíntotas y teniendo en cuenta todo lo obtenido, su gráfica es:



CUESTIÓN A.4: Enunciar el teorema fundamental del cálculo integral y calcular la integral siguiente: $\int\frac{x^2}{x^2-9}dx$

$$\int \frac{x^2}{x^2-9}dx = \int \frac{x^2-9+9}{x^2-9}dx = \int \frac{x^2-9}{x^2-9}dx + \int \frac{9}{x^2-9}dx = \int 1dx + 9\int \frac{1}{x^2-9}dx$$

Calculemos $\int \frac{1}{x^2-9}dx$ descomponiendola en fracciones simples:

$$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{x^2-9} = \frac{A\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)} + \frac{B\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$$

$$1 = A\cdot(x+3)+B\cdot(x-3) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \to 1=6A \to A=\frac{1}{6} \\ x=-3 \to 1=-6B \to B=\frac{-1}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2-9}dx = \int \frac{1/6}{x-3}dx + \int \frac{-1/6}{x+3}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3|$$

$$\boxed{\int \frac{x^2}{x^2-9}dx = x + \frac{9}{6}\ln|x-3| - \frac{9}{6}\ln|x+3| + C}$$

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: Discutir y resolver el sistema siguiente en función de los posibles valores del parámetro k.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \\ x-y+z=k \end{array}\right\}$$

Averigüemos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-8+8-(0-4+4)=0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, ya que si elegimos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+4 \neq 0$

Averigüemos el rango de la matriz ampliada:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{array}\right)$ El menor de orden 3 con las tres primeras columnas es nulo, luego consideremos el que componen la 1ª, 2ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 0+0+0-(0-4k+0) = -4k$

Entonces, pueden ocurrir dos cosas, dependiendo de que k sea 0 o no.

$\boxed{k\neq 0}$

El rango de la ampliada es 3 y el de la de los coeficientes es 2. El sistema es incompatible

$\boxed{k=0}$

El rango de la ampliada y la matriz de los coeficientes es 2 menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

$\left.\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ -2x-4z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$ Como el rango es 2 anulemos una de las ecuaciones, por ejemplo la 2ª

El sistema inicial es equivalente a $\left.\begin{array}{l} x+2y+4z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Despejando en la 1ª ecuación $x=-2y-4z \Rightarrow$

sustituyendo en la 2ª ecuación $-2y-4z-y+z=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3y-3z=0 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow \boxed{y=-z}$

$x=-2(-z)-4z=-2z \Rightarrow \boxed{x=-2z}$

CUESTIÓN B.2: Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r: x+1=y=1-z$$

y

$$s:\left.\begin{array}{r} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

y calcular la distancia entre ellas.

$$r:\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{-1}\Rightarrow\begin{cases} P_r=(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} P_s=(0,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,1,-1) \end{cases}$$

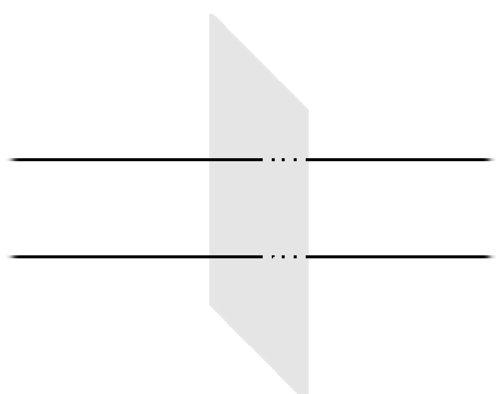
Comparando los vectores directores de las rectas, son el mismo, pueden ser paralelas o coincidentes.
Comparémoslos con el vector $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,1,2)-(-1,0,1)=(1,1,1)$.

No son proporcionales los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$, las rectas son paralelas.

La distancia entre ellas es la distancia de un punto de ellas a la otra recta. Calculémoslo con la fórmula:

$$\text{Distancia}(\mathrm{P}_r,\mathrm{s})=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{P_r}P_s}\times\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|(-2,2,0)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+4+0}}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

Otra forma de obtener esta distancia, es calcular un plano perpendicular a ambas rectas:



$$\pi:\begin{cases} n=(1,1,-1) \\ P_s=(0,1,2) \end{cases}\Rightarrow \mathrm{x+y-z+D=0 \text{ pasa por } P_s}\Rightarrow 0+1-2+D=0\Rightarrow D=1$$

El plano es $\pi: x+y-z+1=0$

Determinemos las coordenadas de los puntos de corte de las rectas r y s con este plano:
Con la recta s, es el punto utilizado $P_s=(0,1,2)$

Con la recta r, el punto Q_r que vamos a calcular:

$$\begin{cases} \pi : x+y-z+1=0 \\ r: x+1=y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+1=y \\ y=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x=y-1 \\ z=1-y \end{cases} \Rightarrow y-1+y-1+y+1=0$$

$$3y-1=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{3}}$$

Sustituyendo $\boxed{x=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}}$

Sustituyendo $\boxed{z=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}$

$$Q_r=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

La distancia entre las rectas es la distancia entre los puntos $P_s=(0,1,2)$ y $Q_r=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Distancia entre las rectas

=Distancia(P_s , Q_r)=

$$\overrightarrow{P_sQ_r}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-(0,1,2)=\left(\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{P_sQ_r}\right|=\sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{-4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{24}{9}}=\boxed{\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

CUESTIÓN B.3: Definición de derivada de una función en un punto. Demostrar que la derivada de la función $f(x)=x^2$ es $f\,'(x)=2x$.

Este tipo de ejercicios teóricos no aprendemos a hacerlos.

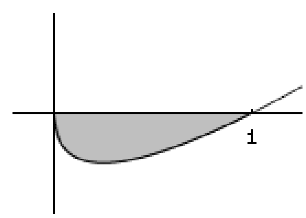
CUESTIÓN B.4: Calcular el área de la región delimitada por el eje x y la función $f(x)=x-\sqrt{x}$.

Averigüemos los puntos de corte de la función con el eje x:

$y=0 \Rightarrow 0=x-\sqrt{x} \Rightarrow x=\sqrt{x} \Rightarrow$ Elevando al cuadrado $x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=1$

El área definida entre el eje y la función será la integral definida de la función desde x=0 hasta x=1

$$Área=\int_0^1 x-\sqrt{x}\,dx=$$



Calculamos primero la primitiva: $\int x-\sqrt{x}dx=\int xdx-\int x^{1/2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^{3/2}}{3/2}=\frac{x^2}{2}\cdot$

$$Área=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2\cdot x^{3/2}}{3}\right]_0^1=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{2\cdot 1^{3/2}}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{2\cdot 0^{3/2}}{3}\right]=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{-1}{6}$$

Por lo tanto el área de la región del plano limitada por la curva y el eje x vale $\frac{1}{6}$