UNIVERSIDAD DE MURCIA

Región de Murcia

Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Junio 2011

MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A:

CUESTIÓN A.1: Demuestre, sin utilizar la regla de Sarrus y sin desarrollar directamente por una fila y/o columna, que

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Indique en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando. **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN A.2: Determine el plano que contiene a la recta

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y-5z=-2 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

y es paralelo a la recta

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-17}{-1}$$

[2.5 puntos]

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, se pide:

a) Estudiar si existen asíntotas verticales y calcular los límites laterales en caso de que las haya. **[1.25 puntos]**

b) Estudiar si existen asíntotas horizontales y calcularlas en caso de que las haya. **[1.25 puntos]**

CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución). **[1 punto]**

b) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$, donde ***ln*** denota la función logaritmo neperiano, utilizando el método de integración por partes. **[1.5 puntos]**

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA
ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE
Junio 2011
MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: Discuta, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones. **No hay que resolverlo**. **[2.5 puntos]**

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+2z=3 \\ x-3y-z=-1 \\ -x+8y+4z=b \end{array}\right\}$$

CUESTIÓN B.2: Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las tres medianas del triángulo de vértices A = (5, −1, 4), B = (−1, 7, 6) y C = (5, 3, 2). **[1.25 puntos]**

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto (llamado baricentro) y calcule las coordenadas de dicho punto. **[1.25 puntos]**

CUESTIÓN B.3: Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

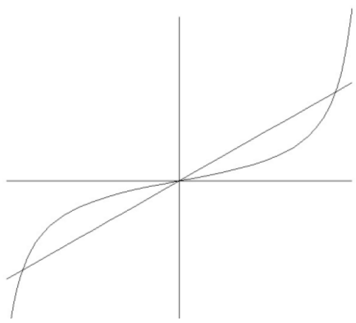
a) Demuestre que el área de dicho triángulo viene dada por la función A(x)=12sen(x), donde ***x*** denota el ángulo formado por las manecillas del reloj. **[1.25 puntos]**

b) Determine el ángulo que deben formar las manecillas del reloj para que el área de dicho triángulo sea máxima ¿Cuál es el valor de dicha área máxima? **Se puede utilizar el apartado a) aunque no se haya demostrado**.**[1.25 puntos]**

CUESTIÓN B.4:

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{3x}{1-x^2}$ definida para los valores ***−1 < x < 1***, determine los puntos de corte de la recta ***y = 4x*** con la gráfica de ***f*** . **[0.75 puntos]**

b) Calcule el área del recinto limitado por la recta ***y = 4x*** y la gráfica de ***f*** . **[1.75 puntos]**



Soluciones Matemáticas PAU Junio 2011

Cuestión A.1: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

Aplicamos que un determinante no varía si a una fila le sumamos una combinación lineal de las demás

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 2^{\text{a}} \text{ fila menos } 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \text{ fila menos } 1^{\text{a}} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Que por tener la segunda fila proporcional a la tercera vale 0

Cuestión A.1: (Antonio Mengiano Corbacho)

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.
- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.
- Si a una fila de un determinante le sumamos una combinación lineal de las demás no varía.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 3^{\text{a}} \text{ fila menos } 2^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \text{ fila menos } 1^{\text{a}} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Cuestión A.2: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

Consideramos el haz de planos que contiene a la primera recta:

3x + 2y − 5z + 2 + t(4x − 3y − 2z + 1) = 0; (3 + 4t)x + (2 − 3t)y − (5 + 2t)z + 2 + t = 0

Si el plano ha de ser paralelo a la recta el vector ortogonal del plano: (3 + 4t, 2 − 3t,−5 − 2t) ha de ser perpendicular al vector dirección de la recta: (3,−2,−1). Por tanto el producto escalar ha de ser 0.

$$3(3+4t)-2(2-3t)+(-1)(-5-2t)=0;\ 20t+10=0;\ t=\frac{-1}{2}$$

Sustituyendo tenemos el plano pedido: $\boxed{\mathbf{10x + y - 12z + 5 = 0}}$

Cuestión A.2: (Antonio Mengiano Corbacho)

Determine el plano que contiene a la recta

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-5z=-2 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

y es paralelo a la recta

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-17}{-1}$$

El plano pedido se obtiene a parir de un punto de la recta r, su vector director y otro vector director de la recta s, que es $\vec{v_s}=(3,-2,-1)$

Para hallar un punto y un vector director de r calculamos el producto vectorial de los vectores normales a los planos que la definen

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i}-20\vec{j}-9\vec{k}-\left(8\vec{k}-6\vec{j}+15\vec{i}\right)=-19\vec{i}-14\vec{j}-17\vec{k}=(-19,-14,-17)=\vec{v_r}$$

Y un punto lo obtenemos dándole un valor a z = 0 y resolviendo el sistema que queda

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=-2 \\ 4x-3y=-1 \end{array}\right\} \text{1ª fila multiplicada por 4 y 2ª por -3} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+8y=-8 \\ -12x+9y=+3 \end{array}\right\}$$

Al sumarlas $17y=-5 \rightarrow y=\frac{-5}{17}$ y al sustituir en la 1ª ecuación $3x-\frac{10}{17}=-2 \Rightarrow 3x=-2+\frac{10}{17} \Rightarrow 3x=\frac{-24}{17}$ y despejando $x=\frac{-8}{17}$

El punto obtenido es $P\left(\frac{-8}{17},\frac{-5}{17},0\right)$ y el plano definido por los vectores $\vec{v_r}=(19,14,17)$ $\vec{v_s}=(3,-2,-1)$ y el punto P se obtiene de dos formas distintas:

En paramétricas:

$$\Pi: \left.\begin{array}{l} x=\frac{-8}{17}+19\lambda+3\mu \\ y=\frac{-5}{17}+14\lambda-2\mu \\ z=0+17\lambda-\mu \end{array}\right\}$$

O bien, resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} x+\frac{8}{17} & y+\frac{5}{17} & z \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{17x+8}{17} & \frac{17y+5}{17} & \frac{17z}{17} \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17x+8 & 17y+5 & 17z \\ 19 & 14 & 17 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-14(17x+8)+51(17y+5)-38\cdot 17z-\left(42\cdot 17z-19(17y+5)-34(17x+8)\right)=0$$

$$20(17x+8)+70(17y+5)-80\cdot 17z=0 \to 340x+160+578y+350-1360z=0 \to \boxed{\pi \equiv 2x+7y-8z+3=0}$$

Cuestión A.3: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

a) Por las características de la exponencial el denominador se aproximará a 0 cuando x se acerque 0.

Estudiemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

*Hay asíntota vertical en **x = 0***

b) Asíntota horizontal y = n : $n = \lim_{x\to\infty} f(x)$

Por incluir la función exponencial tendremos que estudiar los dos lados

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación,}$$

Dividiendo numerador y denominador por e^x*, resulta*:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Como $\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$*, resulta para el otro lado:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Las asíntotas horizontales son y=1 e y=-1

Cuestión A.3: (Antonio Mengiano Corbacho)

a) Las asíntotas verticales son de la forma **x = k** siendo **k** el conjunto de valores reales de **x** que anulan el denominador.

La recta **x = 0** (eje de ordenadas) es asíntota vertical.

b) Son de la forma **y = k** siendo **k** el conjunto de valores reales que toma la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indet.} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \left\{Aplicando\ L'Hopital\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

Las rectas **y = 1** e **y = -1** son asíntotas horizontales de f(x).

Cuestión A.4: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

a)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt;\ dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1+t}2tdt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1+t}dt = \left\{ Dividiendo\ t^2 = (t+1)(t-1)+1 \right\} = 2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right) = x - 2\sqrt{x} + \ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$$

b)

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln\left(1+x^2\right) \to du = \frac{2x}{1+x^2}dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} = x\ln\left(1+x^2\right) - \int x\frac{2x}{1+x^2}dx =$$

Para calcular el valor de $\int x\frac{2x}{1+x^2}dx = 2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = 2\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = 2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = 2\left(x - arctgx\right)$

Por lo que $\int \ln\left(1+x^2\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right) - 2\left(x - arctgx\right)$

Y por tanto $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2) - 2x + arctgx\right]_0^1 = \ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2}$

Cuestión A.4: (Antonio Mengiano Corbacho)

Resuelto de forma análoga

Cuestión B.1: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & b \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es: |M| = -12+a+16-6-4a+8=6 − 3a

Que se anula para a = 2, por tanto:

Para a ≠ 2 y $\forall$ b, rango(M)=3=rango(A)=número de incógnitas: ***sistema compatible determinado****.*

Para a = 2 queda el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$$

Consideramos el determinante obtenido de la matriz ampliada que resulta de quitar la segunda columna, las dos primeras columnas incluyen un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ *y el de tamaño 3 vale* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & b \end{vmatrix} = 15 - 3b$

Que se anula para b = 5, por tanto:

Para a = 2 y b ≠ 5, rango(M) = 2 < 3 =rango(A): sistema incompatible.

Para a = 2 y b = 5, rango(M)=2 = rango(A) < 3 = número de incógnitas: sistema compatible indeterminado.

Cuestión B.1: (Antonio Mengiano Corbacho)

Resuelto de forma análoga

Cuestión B.2: (Germán Ibañez de Opacua Molina)

a) Mediana del vértice A: punto medio del lado BC : $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = (2,\ 5,\ 4)$ *; el vector que une A con el punto medio es: (2 − 5, 5 + 1, 4 − 4) = (−3, 6, 0) como sólo interesa la dirección tomamos el vector* $\overrightarrow{v_A} = (-1,\ 2,\ 0)$ *;*

la mediana de A es $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$

Mediana del vértice B: punto medio del lado AC: $\left(\frac{5+5}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (5,\ 1,\ 3)$*; el vector que une B con el punto medio es: (5 + 1, 1 − 7, 3 − 6) = (6,−6,−3) como sólo interesa la dirección tomamos el vector* $\overrightarrow{v_B} = (-2,\ 2,\ 1)$ *;*

la mediana de B es $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 2t \\ z = 6 + t \end{cases}$

Mediana del vértice C: punto medio del lado AB: $\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (2,\ 3,\ 5)$*; el vector que une C con el punto medio es: (2 − 5, 3− 3, 5 − 2) = (−3, 0, 3) como sólo interesa la dirección tomamos el*

Vector $\overrightarrow{v_C} = (-1,\ 0,\ 1)$ *;*

la mediana de C es $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$

b) Vamos a calcular el punto de corte entre las medianas de A y de C, ponemos como parámetro s en vez de t en la de A

$$\begin{cases} x = 5 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Igualando coordenadas:

5 − s = 5 − t

−1 + 2s = 3

4 = 2 + t

La solución es t = 2, s = 2 Sustituimos en la mediana de A para obtener el punto que será el baricentro:

$$\begin{cases} x = 5\ -2 \\ y = -1\ +4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Resulta: Baricentro: G(3, 3, 4)

Comprobemos que este punto está en la mediana de B y con ello habremos respondido a todo lo que piden:

3 = −1 − 2t’

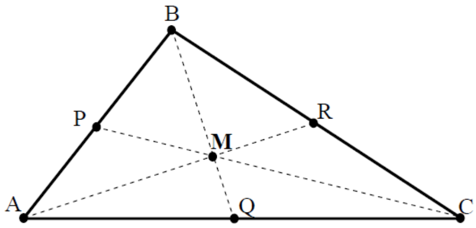
3 = 7 + 2t’

4 = 6 + t’ ; se verifica efectivamente para t’ = −2

Nota: Las coordenadas del baricentro vienen dadas directamente por la media aritmética de las coordenadas de los vértices del triángulo: $G=\left(\frac{5-1+5}{3},\frac{-1+7+3}{3},\frac{4+6+2}{3}\right)=(3,3,4)$

Cuestión B.2: (Antonio Mengiano Corbacho)

Para facilitar la comprensión del ejercicio se hace el gráfico adjunto.



Los puntos medios de los lados del triángulo son los siguientes:

$$M_{\overline{AB}}\equiv P(2,3,5)\quad M_{\overline{AC}}\equiv Q(5,1,3)\quad M_{\overline{BC}}\equiv R(2,5,4)\quad .$$

Las ecuaciones paramétricas de las tres medianas son las siguientes:

$$\overrightarrow{u'}=\overrightarrow{AR}=(2,5,4)-(5,-1,4)=(-3,6,0)\to\vec{u}=(1,-2,0)$$
$$\overrightarrow{v'}=\overrightarrow{BQ}=(5,1,3)-(-1,7,6)=(6,-6,-3)\to\vec{v}=(2,-2,-1)$$
$$\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{CP}=(2,3,5)-(5,3,2)=(-3,0,3)\to\vec{w}=(1,0,-1)$$

$$Mediana\ por\ A\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Vector\ director=\vec{u}=(1,-2,0)\\ Punto:A(5,-1,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_A\equiv\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=4\end{cases}.$$

$$Mediana\ por\ B\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Vector\ director=\vec{v}=(2,-2,-1)\\ Punto:B(-1,7,6)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_B\equiv\begin{cases}x=-1+2\mu\\ y=7-2\mu\\ z=6-\mu\end{cases}$$

$$Mediana\ por\ C\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Vector\ director=\vec{w}=(1,0,-1)\\ Punto:B(5,3,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow m_C\equiv\begin{cases}x=5+\gamma\\ y=3\\ z=2-\gamma\end{cases}$$

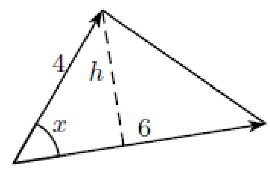
b) Si admitimos la hipótesis planteada no es necesario demostrar que las rectas se cortan en un punto, por lo cual, tienen que ser iguales las respectivas coordenadas de las rectas tomadas dos a dos y además, el punto de corte tiene que ser el mismo, veamos:

$$m_A \equiv \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad m_B \equiv \begin{cases} x = -1+2\mu \\ y = 7-2\mu \\ z = 6-\mu \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} 5+\lambda = -1+2\mu \\ -1-2\lambda = 7-2\mu \\ 4 = 6-\mu \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mu = 2; \quad \lambda = -2 \Rightarrow M(3,3,4)$$

$$m_A \equiv \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -1-2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad m_C \equiv \begin{cases} x = 5+\gamma \\ y = 3 \\ z = 2-\gamma \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} 5+\lambda = 5+\gamma \\ -1-2\lambda = 3 \\ 4 = 2-\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = -2; \quad \lambda = -2 \Rightarrow M(3,3,4)$$

Como puede verse, el punto de corte de las rectas es el mismo, como teníamos que comprobar. El baricentro es M(3, 3, 4)

Cuestión B.3: (Germán Ibañez de Opacua Molina)



a)

$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$, *como h = 4 sen x. Resulta:* $\text{Área} = \frac{6 \cdot 4.senx}{2} = 12senx$

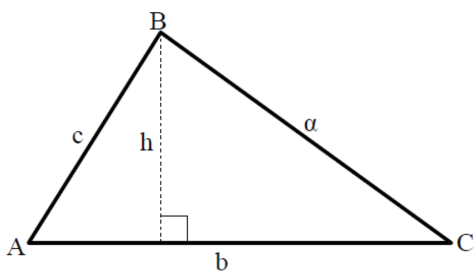
b) Derivando: A'(x) = 12 cos x que se anula para $x = \frac{\pi}{2}$. *Estudiemos el cambio de signo en la derivada de la función:*

x	$\frac{\pi}{2}$	
A'	+	-
A	↗	↘

Para $x = \frac{\pi}{2}$ *la función A(x) presenta un máximo. El valor del área máxima es pues*

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12sen\frac{\pi}{2} = 12\ cm^2$$

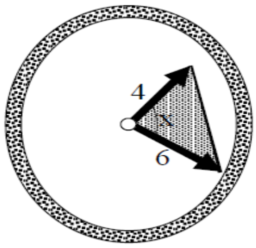
Cuestión B.3: (Antonio Mengiano Corbacho)



Sabiendo que el área de un triángulo es el producto de la base por la altura y dividido por dos: $S=\frac{b\cdot h}{2}$.

Por otra parte, de la figura se deduce que: $senA=\frac{h}{c}\cdot\Rightarrow$h=c·senA. Sustituyendo el valor de h en la fórmula del área, resulta: $S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{b\cdot c\cdot senA}{2}$.

De la última fórmula se deduce que "el área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman".



Teniendo en cuenta lo anterior y observando la figura del reloj, es fácil deducir lo pedido: $S=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{4\cdot 6\cdot senx}{2}=12senx$ (como queríamos demostrar)

b) Para que el área sea máxima es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

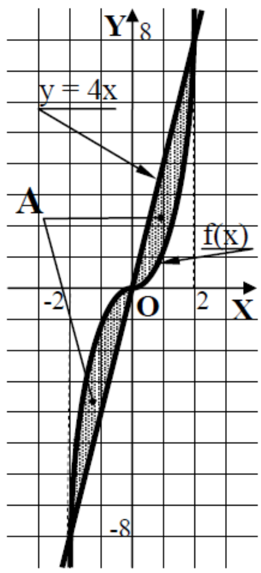
Para que el área del triángulo sea máxima las agujas deben formar un ángulo de 90º El valor del área máxima es la siguiente:

$$\text{A}(\text{x})=12\cos\text{x}=0\Rightarrow\begin{cases}x=90^{o}\rightarrow A''(x)=-12senx\rightarrow A''(90^{o})=-12<0\rightarrow \text{Máximo}\\ x=270^{o}\rightarrow A''(270^{o})=+12<0\rightarrow \text{Minimo}\end{cases}$$

Para que el área del triángulo sea máxima las agujas deben formar un ángulo de 90º El valor del área máxima es la siguiente:

A(90º)=12sen90º=12 cm^2

Cuestión B.4: (Germán Ibañez de Opacua Molina)



a) Busquemos los puntos de corte:

$$s:\begin{cases}y=4x\\ y=\frac{3x}{1-x^2}\end{cases}\Rightarrow 4x=\frac{3x}{1-x^2}\Rightarrow 4x\cdot\left(1-x^2\right)=3x\Rightarrow 4x-4x^3=3x\Rightarrow x-4x^3=0$$

$$x\left(1-4x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 1-4x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$$

Los puntos de corte son: $x=0$, $x=\pm\frac{1}{2}$

b) Como la figura es simétrica respecto al origen haremos la integral de la mitad:

Primero la primitiva:

$$\int\left(4x-\frac{3x}{1-x^2}\right)dx=\frac{4x^2}{2}+\frac{3}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=2x^2+\frac{3}{2}\ln\left|1-x^2\right|$$

La integral definida:

$$\int_0^{1/2}\left(4x-\frac{3x}{1-x^2}\right)dx=\left[2x^2+\frac{3}{2}\ln\left|1-x^2\right|\right]_0^{1/2}=2\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\ln\left|1-\frac{1}{4}\right|-0=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Área encerrada por las dos curvas: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Cuestión B.4: (Antonio Mengiano Corbacho)

Resuelto de forma semejante