PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Septiembre 2011
MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del siguiente determinante, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de los determinantes se está utilizando.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN A.2: Determine el punto de la recta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A = (3, 2, 1). **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, se pide:

a) Determine los puntos de la gráfica de *f* para los cuales la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. **[1.5 puntos]**
b) Determine si, para alguno de dichos puntos, la recta tangente a la gráfica coincide con la bisectriz del segundo cuadrante. **[1 punto]**

CUESTIÓN A.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{sen(x)}{1+\cos^2(x)}dx$ **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^{\pi/2} \frac{sen(x)}{1+\cos^2(x)}dx$ **[1 punto]**

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Septiembre 2011
MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN B:
CUESTIÓN B.1:

a) Determine para qué valores del parámetro a la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

es regular. **[1.25 puntos]**

b) Estudie el rango de la matriz A en los casos en que no sea regular. **[1.25 puntos]**

CUESTIÓN B.2: Considérense los puntos A = (2,0,1) y B = (2,0,3), y la recta

$r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{0}$.

Determine los puntos C de la recta r para los cuales el área del triángulo ABC es 2. (Indicación: hay 2 puntos C que son solución del problema). **[2.5 puntos]**

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = x - x^3$, se pide:

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (1,0). **[1.25 puntos]**

b) Calcule los puntos de corte de dicha recta con la gráfica de f. **[1.25 puntos]**

CUESTIÓN B.4:

a) Calcule la integral indefinida $\int x^2 e^x dx$. **[1.5 puntos]**

b) Evalúe la integral definida $\int_0^1 x^2 e^x dx$. **[1 punto]**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{Si todos los elementos de una fila se descomponen en suma} \\ \text{de dos sumandos, su determinante se descompone, en suma} \\ \text{de dos determinantes formados por cada sumando.}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{Si en una fila todos los elementos tienen un factor común,} \\ \text{dicho factor se puede sacar multiplicando al determinante}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 3\cdot5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \{\text{Si en un determinante hay dos filas iguales el determinate es nulo}\} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{5}{2}\cdot 6 = \boxed{15}$$

CUESTIÓN A.2

<u>1ª forma:</u> Pasemos la ecuación de la recta $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ a paramétricas:

$r: \begin{cases} x = -3+2\lambda \\ y = -5+3\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases}$ El punto pedido es $P(-3+2\lambda, -5+3\lambda, -4+3\lambda)$, que cumple además d(P,O)=d(P,A),

Siendo O(0,0,0) y A(3,2,1):

$$\sqrt{(-3+2\lambda-0)^2+(-5+3\lambda-0)^2+(-4+3\lambda-0)^2} = \sqrt{(-3+2\lambda-3)^2+(-5+3\lambda-2)^2+(-4+3\lambda-1)^2}$$

$$\sqrt{(-3+2\lambda)^2+(-5+3\lambda)^2+(-4+3\lambda)^2} = \sqrt{(-6+2\lambda)^2+(-7+3\lambda)^2+(-5+3\lambda)^2}$$

$$\sqrt{9+4\lambda^2-12\lambda+25+9\lambda^2-30\lambda+16+9\lambda^2-24\lambda} = \sqrt{36+4\lambda^2-24\lambda+49+9\lambda^2-42\lambda+25+9\lambda^2-30\lambda}$$

$$\sqrt{50+22\lambda^2-66\lambda}=\sqrt{110+22\lambda^2-96\lambda}$$

$$50+22\lambda^2-66\lambda=110+22\lambda^2-96\lambda$$

$$30\lambda=60$$

$$\boxed{\lambda=2}$$

O bien

$$50+22\lambda^2-66\lambda=-\left(110+22\lambda^2-96\lambda\right)$$

$$50+22\lambda^2-66\lambda=-110-22\lambda^2+96\lambda$$

$$44\lambda^2-162\lambda+160=0$$

$$22\lambda^2-81\lambda+80=0$$

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{81\pm\sqrt{81^2-4\cdot 22\cdot 80}}{2\cdot 22}=\frac{81\pm\sqrt{-159}}{44}=\text{ No tiene solución}$$

$$\lambda=2\Rightarrow\text{El punto pedido es P}:\begin{cases}x=-3+2\cdot 2=1\\ y=-5+3\cdot 2=1\\ z=-4+3\cdot 2=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{P\left(1,1,2\right)}$$

<u>2ª forma:</u> Determinando la ecuación del plano mediatriz del segmento $\overline{OA}$, el punto pedido será el punto de corte de dicho plano con la recta $r:\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{3}$.

El vector normal del plano mediatriz es $\overrightarrow{OA}$ y pasa por el punto medio del segmento $\overline{OA}$:

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(3,2,1)\Rightarrow\quad\pi\equiv 3x+2y+z+D=0$$

$$\pi\text{ pasa por el punto PM(O,A)}=\left(\frac{3+0}{2},\frac{2+0}{2},\frac{1+0}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

$$3\cdot\frac{3}{2}+2+\frac{1}{2}+D=0\Rightarrow 7+D=0\Rightarrow D=-7$$

El plano mediatriz tiene ecuación $\pi\equiv 3x+2y+z-7=0$

Pasemos la ecuación de la recta $r:\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{3}$ a paramétricas:

$r:\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=-5+3\lambda \\ z=-4+3\lambda \end{cases}$ El punto pedido de la recta r tiene un valor de λ es el que resulta de resolver:

$$3(-3+2\lambda)+2(-5+3\lambda)-4+3\lambda-7=0$$

$$-9+6\lambda-10+6\lambda-4+3\lambda-7=0$$

$$-30+15\lambda=0$$

$$\lambda=2$$

$$\text{P}:\begin{cases} x=-3+2\cdot 2=1 \\ y=-5+3\cdot 2=1 \Rightarrow \boxed{P(1,1,2)} \\ z=-4+3\cdot 2=2 \end{cases}$$

CUESTIÓN A.3

a) La recta bisectriz al segundo cuadrante es $y = - x$, por lo tanto la pendiente es **m = -1**

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3-6x^2+8x$ es

$$f'(x)=3x^2-12x+8$$

Igualamos ambas pendientes:

$$f'(x)=3x^2-12x+8=-1$$
$$3x^2-12x+9=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3}=\frac{12\pm\sqrt{36}}{6}=\begin{cases} x=\frac{12+6}{6}=3 \\ x=\frac{12-6}{6}=1 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son:

$x=3\Rightarrow f(3)=f(x)=3^3-6\cdot 3^2+8\cdot 3=27-54+24=-3\Rightarrow \boxed{P_1=(3,-3)}$

$x=1\Rightarrow f(1)=1^3-6\cdot 1^2+8=9-6=3\Rightarrow \boxed{P_2=(1,3)}$

b) Las rectas tangentes por esos puntos tienen por ecuación: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$P_1 = (3, -3) \Rightarrow y + 3 = -1(x - 3) \Rightarrow \mathrm{y} + 3 = -\mathrm{x} + 3 \Rightarrow \boxed{\mathrm{y} = -\mathrm{x}}$ Esta es la bisectriz del segundo cuadrante

$P_2 = (1, 3) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow \mathrm{y} - 3 = -\mathrm{x} + 1 \Rightarrow \boxed{\mathrm{y} = -\mathrm{x} + 4}$ Esta no es la bisectriz del segundo cuadrante

CUESTIÓN A.4

a)

$$\int \frac{sen(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \text{cos(x)=t} \to \text{–sen(x)dx=dt} \\ dx = \dfrac{dt}{-sen(x)} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{sen(x)}}{1+t^2} \frac{dt}{-\cancel{sen(x)}} = -\int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= -arctg(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Deshaciendo cambio de variable} \\ \text{t=cos(x)} \end{array} \right\} = \boxed{-\text{arc tg}\left(\cos(x)\right) + K}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{sen(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Regla de Barrow} \\ \displaystyle\int \frac{sen(x)}{1+\cos^2(x)} dx = -\text{arc tg}\left(\cos(x)\right) \end{array} \right\} = \left[\text{-arc tg}\left(\cos(x)\right) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[\text{-arc tg}\left(\cos(\frac{\pi}{2}) \right) \right] - \left[\text{-arc tg}\left(\cos(0)\right) \right] = -arctg 0 + arctg 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1

a) Se dice que una matriz es regular si su determinante es distinto de cero y por lo tanto tiene inversa

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a\cdot a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2\cdot\left(a^4+1+1-\left(a^2+a^2+1\right)\right) =$$

$$= a^2\cdot\left(a^4+2-2a^2-1\right) = a^2\cdot\left(a^4-2a^2+1\right)$$

$$|A| = 0$$

$$a^2\cdot\left(a^4-2a^2+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a^4-2a^2+1=0 \to a^2 = \dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1} \\ \boxed{a=-1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Para todo a} \neq 0; \quad \text{a} \neq +1; \quad \text{a} \neq -1 \text{ la matriz A es regular}}$$

b) Para a=0

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Rango de A es menor que 3}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rango de A es 2}}$$

Para a=1

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las 3 filas son iguales $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rango de A es 1}}$

Para a=-1

$$A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La 2ª y 3ª fila son iguales y la 1ª es proporcional a la 2ª $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rango de A es 1}}$

CUESTIÓN B.2

Pasemos la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{0}$ a paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=0+0\lambda \to y=0 \\ z=2+0\lambda \to z=2 \end{cases}$$

Así cualquier punto C de la recta r tiene la expresión $C(-1-\lambda, 0, 2)$

El área del triángulo ABC se obtiene con la fórmula:

$$\text{Área del triángulo}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \overrightarrow{AB}=B-A=(2,0,3)-(2,0,1)=(0,0,2) \\ \overrightarrow{AC}=C-A=(-1-\lambda, 0, 2)-(2,0,1)=(-3-\lambda,0,1) \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -3-\lambda & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{1}{2}\left|2(-3-\lambda)\vec{j}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,-6-2\lambda,0)\right|=\left|-3-\lambda\right|$$

$$|-3-\lambda| = 2 \Rightarrow \begin{cases} -3-\lambda = 2 \to \boxed{-5=\lambda} \\ -3-\lambda = -2 \to \boxed{-1=\lambda} \end{cases}$$

$$\lambda = -5 \Rightarrow C: \begin{cases} x = -1+5 = 4 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C:(4,0,2)}$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow C: r: \begin{cases} x = -1+1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C:(0,0,2)}$$

CUESTIÓN B.3

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x - x^3$ en el punto (x_0, y_0) tiene la ecuación $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Calculemos $f'(x_0)$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 1 - 3 \cdot 1^2 = -2$$

La ecuación de la recta tangente en (1,0) queda:

$$y - 0 = -2 \cdot (x-1)$$

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

b) Uno de los puntos de corte es el punto de tangencia (1,0), para determinar alguno más resolvemos el sistema formado por la ecuación de la función $y = x - x^3$ y la recta tangente $y = -2x + 2$:

$$\begin{cases} y = x - x^3 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow x - x^3 = -2x + 2 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow$$

Resolviendo por Ruffini

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$$x^3-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+x-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x-2=0 \rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1 \\ x=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$x=1 \rightarrow f(1)=0$

$x=-2 \rightarrow f(-2)=-2-(-2)^3=-2+8=6$

Los puntos de corte son $\boxed{(1,\ 0) \text{ y } (-2,\ 6)}$

CUESTIÓN B.4

a)

$$\int x^2e^xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes} \\ \text{u=x}^2 \rightarrow du=2xdx \\ dv=e^xdx \rightarrow v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right\}=x^2\cdot e^x-\int e^x 2xdx=$$

$$=x^2\cdot e^x-2\int e^xxdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes} \\ \text{u=x} \rightarrow du=dx \\ dv=e^xdx \rightarrow v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right\}=$$

$$=x^2\cdot e^x-2\left(x\cdot e^x-\int e^xdx\right)=x^2\cdot e^x-2\left(x\cdot e^x-e^x\right)=\boxed{x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x+K}$$

b)

$$\int_0^1 x^2e^xdx=\left[x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x\right]_0^1=$$

$$=\left[1^2\cdot e^1-2\cdot 1\cdot e^1+2e^1\right]-\left[0^2\cdot e^0-2\cdot 0\cdot e^0+2e^0\right]=$$

$$=(e-2\cdot e+2\cdot e)-2=\boxed{e-2}$$