UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Junio 2012

MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+ay+a^2z=-1 \\ ax+a^2y+a^3z=2 \end{cases}$$

b) **[1 punto]** Resuelva el sistema cuando sea compatible.

CUESTIÓN A.2: Considere la recta r y el plano **π** dados por las ecuaciones

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1} \quad \text{y} \quad \pi: x-2y-z=4$$

a) **[1 punto]** Calcule el ángulo que forman la recta r y el plano **π**.

b) **[1,5 puntos]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano **π**.

CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si\ x\le 1 \\ \ln x-1 & si\ x>1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b sabiendo que f (x) cumple las siguientes propiedades

a) f (x) es continua en todo $\mathbb{R}$;

b) f (x) tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f (x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 9.

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Se dice que una matriz cuadrada A es **ortogonal** si cumple que $A^t \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de A.

Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es ortogonal

$$\begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}.$$

CUESTIÓN B.2:

a) **[1,25 puntos]** Halle la ecuación implícita (o general) del siguiente plano

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 3\mu \end{cases} :$$

b) **[1,25 puntos]** Determine la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto (−1,2,3).

CUESTIÓN B.3: Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Dominio de definición y cortes con los ejes.
b) **[0,75 puntos]** Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
c) **[0,75 puntos]** Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).
d) **[0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada.

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f (x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 1.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1

La matriz de los coeficientes y ampliada del sistema dado es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a^2 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 2 \end{array}\right)$$

Calculando el determinante de A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = a^4 + a^3 + a^2 - \left(a^2 + a^3 + a^4\right) = 0$$

El sistema solo puede ser Compatible Indeterminado o Incompatible.

Estudiemos como es la matriz ampliada, transformándola en otra equivalente triangular:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a^2 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 2 \end{array}\right) = \left\{\begin{array}{l} F2^{\text{a}} - \text{F}1^{\text{a}} \\ \text{F}3^{\text{a}} - \text{a}\cdot\text{F}1^{\text{a}} \end{array}\right\} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & a^2-a & a^3-a & 2-2a \end{array}\right) =$$

$$= \left\{F3^{\text{a}} - \text{a}\cdot\text{F}2^{\text{a}}\right\} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2a+3a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2+a \end{array}\right)$$

Cuando a=-2 el sistema inicial es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -3y+3z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right.$$ El sistema es Compatible Indeterminado

Cuando a≠-2 el sistema es Incompatible

b) Cuando a=-2 es sistema inicial es equivalente a $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -3y+3z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right.$ cuya solución es

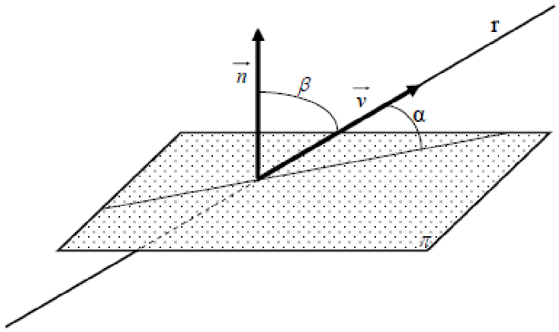
$$-3y+3z=-3 \Rightarrow y = z+1 \Rightarrow \left\{\text{Sustituyendo en la } 1^{\text{a}} \text{ ecuación}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+z+1+z=2 \Rightarrow x = -2z+1$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

CUESTIÓN A.2

a) El ángulo que forman el plano π y la recta r es el complementario (suman 90º) del ángulo que forman un vector director de r y un vector normal al plano. Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:



$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \quad \text{y} \quad \pi: x - 2y - z = 4$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1, -2, -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_\pi}\right| \cdot \cos\beta \Rightarrow 2 + 2 - 1 = \sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+4+1} \cdot \cos\beta$$

$$3 = 6 \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Luego el ángulo formado por r y π es 90º-60º=30º

b) El plano γ pedido, por contener a r tiene como vector director al vector director de r, $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1)$ y por ser perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal de π $\overrightarrow{n_\pi} = (1, -2, -1)$.

Un punto cualquiera de la recta r puede ser P(-1,1, 2)

Con todo esto:

$$\gamma\left(P; \overrightarrow{v_r}; \overrightarrow{n_\pi}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 1 + y - 1 - 4z + 8 - (-z + 2 - 2y + 2 - 2x - 2) = 0$$

$$3x + 3y - 3z + 6 = 0$$

$$\boxed{x + y - z + 2 = 0}$$

CUESTIÓN A.3

Por ser continua en R tiene que cumplirse que los límites laterales para x = 1 tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2+ax+b=2+a+b\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x-1=0-1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 2+a+b=-1\Rightarrow \boxed{a+b=-3}$$

Por tener un extremo relativo para x = 0 tiene que anularse su derivada para este valor:

$$f'(x)=\begin{cases}4x+a & si\ x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & si\ x>1\end{cases}\Rightarrow f'(0)=\mathrm{a}\Rightarrow \boxed{\mathrm{a}=0}$$

Sustituyendo en la igualdad a+b=-3 se obtiene $\boxed{\text{b=-3}}$

CUESTIÓN A.4

a) Una primitiva de $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ es

$$F(x)=\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\to x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{1+t}2tdt=$$

$$=2\int\frac{t}{1+t}dt=2\int\frac{1+t-1}{1+t}dt=2\left(\int\frac{1+t}{1+t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt\right)=2\left(t-\ln|1+t|\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshago el cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t\end{array}\right\}=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+K$$

b) Por ser positiva siempre la función $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, el área pedida es la siguiente:

$$ÁREA=\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]_0^9=\left(2\cdot 3-2\ln 4\right)-\left(0-2\ln 1\right)=\boxed{6-2\ln 4 \text{ unidades cuadradas}}$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1

a)

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & b \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+a^2+b^2 & a^2-a^2+0 & 0-ab+0 \\ a^2-a^2+0 & a^2+a^2+0 & 0+ab+0 \\ 0-ab-b & 0+ab+0 & 0+b^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+a^2+b^2 & a^2-a^2+0 & 0-ab+0 \\ a^2-a^2+0 & a^2+a^2+0 & 0+ab+0 \\ 0-ab-b & 0+ab+0 & 0+b^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De lo indicado en la igualdad de matrices se deduce $b^2+1=1\rightarrow\boxed{b=0}$

$$2a^2=1\rightarrow a^2=0'5\rightarrow a=\pm\sqrt{0'5}$$

CUESTIÓN B.2

a) .Dado el plano $\begin{cases} x=1+2\lambda-\mu \\ y=-3+\lambda \\ z=2+3\mu \end{cases}$ dos vectores directores y un punto del mismo son:

$$\vec{u}=(2,1,0);\quad \vec{v}=(-1,0,3);\quad P(1,-3,2)$$

La ecuación del plano pedida viene dada por la igualdad:

$$\pi\left(\vec{u},\vec{v},P\right)=\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$3x-3-(-z+2+6y+18)=0$$

$$\boxed{3x-6y+z-23=0}$$

b) Un vector director de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal de π, que es $\vec{n}=(3,-6,1)$

La recta r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=2-6\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

CUESTIÓN B.3

a) Dada la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$ su dominio viene del estudio de cuando se anula el denominador y cuando es negativo el radicando.

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$, que se excluye del dominio

$x^2-9\geq 0 \Rightarrow$ Igualamos a cero la expresión $x^2-9=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$

En el intervalo $(-\infty,-3] \to x^2-9\geq 0;$ Se puede comprobar con x=-4 $\to (-4)^2-9=+7$

En el intervalo $(-3,3) \to x^2-9<0;$ Se puede comprobar con x=0 $\to 0^2-9=-9$

En el intervalo $[3,+\infty) \to x^2-9\geq 0;$ Se puede comprobar con x=4 $\to (+4)^2-9=+7$

El dominio de la función es $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

Por no estar definida la función para x = 0, <u>la función f(x) no corta al eje Y</u>.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=0 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$$

<u>La función f(x) corta el eje X en los puntos A(-3, 0) y B(3, 0)</u>.

b) Las asíntotas son las siguientes:
<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=+1 \text{ por ser numerador positivo y denominador positivo}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=-1 \text{ por ser numerador positivo y denominador negativo}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador.
No tiene asíntotas verticales por no estar definida la función para x = 1.
<u>Oblicuas</u> son las rectas con la expresión y=mx+n. Donde m y n se calculan en los límites siguientes:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-x}=0$$

No hay asíntota oblicua en $+\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-x}=0$$

No hay asíntota oblicua en $-\infty$

c)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-9}}\cdot\cancel{2}x\cdot(x-1)-1\cdot\sqrt{x^2-9}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{x^2-x-(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}+9}{\sqrt{x^2-9}\cdot(x-1)^2}=\frac{-x+9}{\sqrt{x^2-9}\cdot(x-1)^2}$$

Por ser el denominador siempre positivo, el cambio de signo de la derivada solo se produce cuando cambie de signo el numerador.

$-x+9=0\Rightarrow x=9$

Como el dominio es $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

Cuando x<9 la derivada es positiva, la función crece

Cuando x>9 la derivada es negativa, la función decrece

Decrecimiento en $(-\infty,-3)\cup(3,9)$

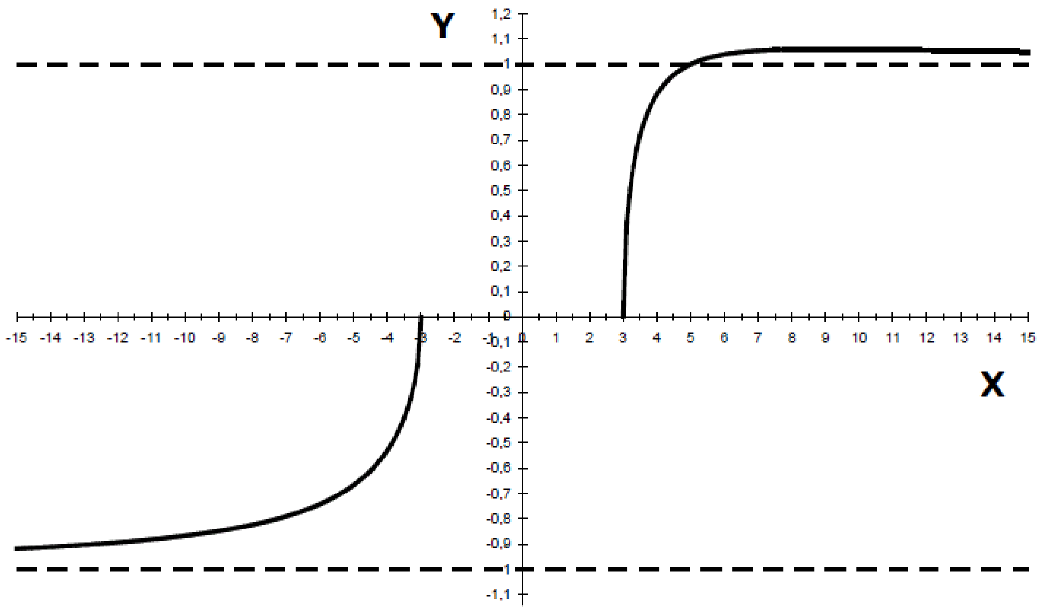
Crecimiento en $(9, +\infty)$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en su dominio y que la derivada se anula para x = 9 y que para este valor pasa de ser creciente a decreciente, la función tiene un máximo relativo para x = 9.

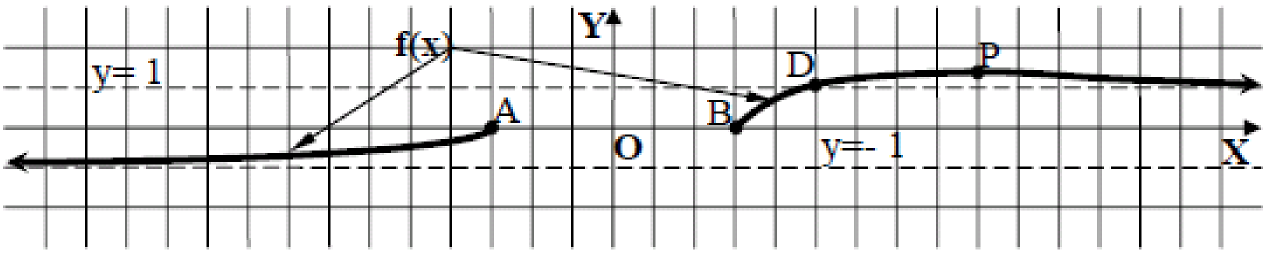
$$f(9)=\frac{\sqrt{9^2-9}}{9-1}=\frac{\sqrt{72}}{8}$$

El máximo relativo está situado en el punto $\left(9,\frac{\sqrt{72}}{8}\right)$

d)



O con menos detalle



CUESTIÓN B.4

a)

$$F(x)=\int \frac{x^2}{e^x}dx=\int x^2\cdot e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integrando por partes}\\ \text{u=x}^2\rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=\end{array}\right\}=$$

$$=x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}2xdx=-x^2\cdot e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integrando por partes}\\ \text{u=x}\rightarrow\text{du=dx}\\ \text{dv=}e^{-x}dx\rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=-x^2\cdot e^{-x}+2\left(x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\text{dx}\right)=$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\left(-x\cdot\text{e}^{-x}+\int e^{-x}\text{dx}\right)=-x^2\cdot e^{-x}+2\left(-x\cdot\text{e}^{-x}-e^{-x}\right)$$

$$\boxed{F(x)=\int \frac{x^2}{e^x}dx=-x^2\cdot e^{-x}-2x\cdot\text{e}^{-x}-2e^{-x}+K}$$

b)

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la función son positivas en R, el área pedida es la siguiente:

$$\acute{A}rea=\int_0^1\frac{x^2}{e^x}dx=\left[-x^2\cdot e^{-x}-2x\cdot\text{e}^{-x}-2e^{-x}\right]_0^1=\left(-1^2\cdot e^{-1}-2\cdot1\cdot\text{e}^{-1}-2e^{-1}\right)-\left(-0^2\cdot e^{-0}-2\cdot0\cdot\text{e}^{-0}-2e^{-0}\right)=$$

$$=-e^{-1}-2e^{-1}-2e^{-1}-\left(0-0-2\right)=\boxed{-5e^{-1}+2=2-\frac{5}{e}\ \text{unidades cuadradas}}$$