UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Septiembre 2012
MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A:

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,25 puntos]** Determine para qué valores del parámetro a el conjunto de vectores $S=\{(1,a,1),(1-a,a-1,0),(1,1,a)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

b) **[1,25 punto]** Estudie el rango del conjunto de vectores S en los casos en que no forme una base de $\mathbb{R}^3$.

CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos] Determine la ecuación implícita (o general) del plano que contiene al punto A = (0,1,2) y es perpendicular a la recta

$$r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}$$

CUESTIÓN A.3: Dada la función $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Dominio de definición.

b) **[0,5 puntos]** Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ¿Es posible calcular también $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$? Justifique la respuesta.

c) **[1,25 puntos]** Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos]

De todas las primitivas de la función $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0,1).

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1:

a) **[1,25 puntos]** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcule las potencias A^2, A^3 y A^4.

b) **[1,25 puntos]** Calcule A^{2012}.

CUESTIÓN B.2: Considere las rectas r y s dadas por las ecuaciones

$$r:\frac{x}{7}=\frac{y}{a-4}=\frac{z+6}{5a-6} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-6}{4} \ .$$

a) **[2 puntos]** Estudie la posición relativa de r y s en función del parámetro a.
b) **[0,5 puntos]** Calcule el punto de corte de r y s en los casos en que se corten.

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+a & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+bx+b+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales f (x) es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos] Calcule el área comprendida entre la curva $y=\dfrac{3}{6+2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1

El conjunto S forma una base de R^3 si y sólo si su rango es 3, es decir, si y sólo si el determinante de la matriz formada por los vectores de S es distinto de cero. Por ello, consideremos A dicha matriz,

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$|S|=\begin{vmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ a & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a(a-1)+1-a+0-\left(a-1+a^2(1-a)\right)=a^2-a+1-a-a+1-a^2+a^3=$$

$$=a^3-3a+2$$

$$|S|=0\to a^3-3a+2=0\to \text{Utilizando el método de Ruffini }\to \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Y ya $a+2=0\to a=-2$

Luego para $a=1 \; o \; a=-2$ uno de los vectores es combinación lineal de los otros y no forman base. Para $a\neq 1 \; y \; a\neq -2$ si forman una base de $\mathbb{R}^3$.

a) Si a=1

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$, el rango de la matriz S es 1, ya que las tres columnas son iguales.

Si a=-2

$$S=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\equiv\left\{\begin{matrix}\text{Realizamos transformaciones para obtener matrices equivalentes}\\ \text{F2ª-3F1ª y F3ª-F1ª}\end{matrix}\right\}\equiv\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\left\{F3^{a}-F2^{a}\right\}\equiv\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Observando las filas no nulas de esta última matriz equivalente a S su rango es 2

CUESTIÓN A.2

El plano pedido tiene como vector normal el vector director de la recta $r:\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x-y+z=3\end{cases}$,

determinemos dicho vector director como el producto vectorial de los dos vectores normales (2,1,-1) y (1,-1,1)

$$v_r=\left(2,1,-1\right)\times\left(1,-1,1\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}-(\vec{k}+2\vec{j}+\vec{i})=-3\vec{j}-3\vec{k}=(0,-3,-3)$$

Nos sirve como vector normal del plano (0,1,1), así el plano es:

0·x+y+z+d=0, como además pasa por (0,1,2) se cumple: 1+2+d=0

Luego d=-3

La ecuación del plano es $\pi\equiv y+z-3=0$

CUESTIÓN A.3

a) Dada la función $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$ debemos excluir de su dominio los valores de x que anulen el denominador y que hagan que $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$

1º $x-1=0\rightarrow x=1$ excluido del dominio

2º $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ Los puntos de cambio de signo de denominador y numerador son x=1 y x=-1

Dividiendo la recta real según estos puntos, nos quedan tres zonas donde considerar el signo del cociente $\frac{x+1}{x-1}$:

(-∞,-1)	-1	(-1+1)	+1	(1,+∞)
Existe f(x)	**Existe**	**No existe f(x)**	**No existe**	**Existe f(x)**

En el intervalo (-∞,-1) elegimos el valor x=2 y para dicho valor la expresión radical $\sqrt{\frac{-2+1}{-2-1}} = \sqrt{\frac{-1}{-3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ existe.

En el intervalo (-1+1) elegimos el valor x=0 y para dicho valor la expresión radical $\sqrt{\frac{0+1}{0-1}} = \sqrt{-1}$ no existe.

En el intervalo (1,+∞) elegimos el valor x=2 y para dicho valor la expresión radical $\sqrt{\frac{2+1}{2-1}} = \sqrt{3}$ existe.

En el punto x=-1 la expresión radical vale $\sqrt{\frac{-1+1}{-1-1}} = \sqrt{\frac{0}{-2}} = 0$ existe.

En el punto z=1 la expresión radical vale $\sqrt{\frac{1+1}{1-1}} = \sqrt{\frac{2}{0}}$ no existe.

En definitiva, Dominio de definición de $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)$ es $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

b)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = 1\left(\sqrt{\frac{1+1}{1-1}} - 1\right) = \frac{1}{0} = +\infty$$

Lo comprobamos utilizando tablas: x=1'001 $\rightarrow$ f(x)=1'001$\cdot\left(\sqrt{\frac{2'001}{0'001}} - 1\right) = 1'001\left(\sqrt{2001} - 1\right) = 4008004$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ No existe, por estar fuera del dominio de la función los valores de x próximos a 1, pero menores que 1 c)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right) = +\infty\cdot\left(\sqrt{1}-1\right) = +\infty\cdot 0 = \text{Indeterminación}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Simplificamos la expresión}\\ \text{para intentar resolver la indeterminación}\end{array}\right\} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\right) =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Multiplico y divido por el conjugado}\\ \text{del numerador, para resolver la indeterminación}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}+x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+x} = \boxed{1}$$

CUESTIÓN A.4

$$\text{F}(x) = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \text{t=e}^x \to t^2 = e^{2x}\\ dt = \text{e}^x dx \to dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}\end{array}\right\} = \int \frac{t^{\cancel{2}}}{1+t}\frac{dt}{\cancel{t}} = \int \frac{t}{1+t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = \int \frac{1+t}{1+t}\,dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt = \int 1dt - \int \frac{1}{1+t}\,dt = t - \ln|1+t| =$$

$$= \left\{\text{Deshaciendo el cambio de variable}\right\} = e^x - \ln\left|1+e^x\right| + K$$

Como debe pasar por (0,1) → F(0)=1→ $\left\{\begin{array}{l} e^0 - \ln\left|1+e^0\right| + K = 1\\ \cancel{1} - \ln 2 + K = \cancel{1}\\ \boxed{K = \ln 2}\end{array}\right.$

La primitiva pedida es $\mathrm{F}(x) = e^x - \ln\left|1+e^x\right| + \ln 2$

OPCIÓN B:

CUESTIÓN B.1

a)

$$A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\to A^2=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3-4&0-12+12&0-15+16\\0-4+5&3+16-15&4+20-20\\0+3-4&-3-12+12&-4-15+16\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0-1&-3+0+3&-4+0+4\\0+4-4&3-16+12&4-20+16\\0-3+3&-3+12-9&-4+15-12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=$$

$$=-Identidad\cdot A=-A$$

a) Como sabemos que $A^3 = -Id$, para calcular A^{2012} nos interesa dividir 2012 entre 3 y calcular el resto de la división, de manera que escribimos 2012 = 3·670+2. Por lo tanto

$$A^{2012}=A^{3\cdot 670+2}=A^{3\cdot 670}\cdot A^2=\left(A^3\right)^{670}\cdot A^2=$$

$$\text{Como } A^3=-Id\to\left(A^3\right)^{670}=\left(-Id\right)^{670}=\left(-Id\right)^{2\cdot 335}=\left(\left(-Id\right)^2\right)^{335}=$$

$$=Id^{335}=Id$$

$$\text{Resumiendo } A^{2012}=\left(A^3\right)^{670}\cdot A^2=Id\cdot A^2=A^2$$

$$\boxed{A^{2012}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN B.2

a)

<u>1ª forma:</u> El vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (7, a-4, 5a-6)$ y pasa por el punto A = (0,0,−6).

En cuanto a la recta s, su vector director es $\vec{v_s} = (3,-1,4)$ y pasa por el punto B = (5,1,6).

Por lo tanto, para estudiar la posición relativa de las rectas r y s debemos estudiar el rango de las matrices:

$$\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}$$

Siendo $\overrightarrow{AB} = B - A = (5,1,6) - (0,0,-6) = (5,1,12)$

En primer lugar, estudiemos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Si calculamos su determinante tenemos que

$$\begin{vmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & a-4 & 5a-6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -84 + 20(a-4) + 3(5a-6) - \left(-5(5a-6) + 36(a-4) + 28\right) =$$

$$= -84 + 20a - 80 + 15a - 18 + 25a - 30 - 36a + 144 - 28 =$$

$$= 24a - 96 = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{96}{24} = 4}$$

Por lo tanto, si $a \neq 4$ el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}$ es 3 y los vectores son independientes y las rectas se cruzan.

Por otra parte, cuando a = 4 el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

es 2. En efecto, en ese caso su rango no puede ser 3 (ya que el determinante se anula) y podemos entonces encontrar un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo, el formado por sus dos primeras columnas y sus dos primera filas, es decir,

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Además, por la misma razón cuando a = 4 el rango de la matriz

$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix}$ es 2, ya que el mismo menor nos sirve para concluir que su rango es 2. Por lo tanto, cuando a = 4 las dos matrices

$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix}$

tienen rango 2, por lo que las rectas se cortan.

2ª forma:

Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio:

$r: \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6}$ y $s: \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{4}$ plantean un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = 7\lambda \\ y = (a-4)\lambda \\ z = -6 + (5a-6)\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 5+3\mu \\ y = 1-\mu \\ z = 6+4\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\lambda = 5+3\mu \\ (a-4)\lambda = 1-\mu \\ -6+(5a-6)\lambda = 6+4\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\lambda = 5+3\mu \\ (a-4)\lambda = 1-\mu \\ -6+(5a-6)\lambda = 6+4\mu \end{cases} \Rightarrow \mu = \frac{7\lambda-5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-4)\lambda = 1 - \frac{7\lambda-5}{3} \\ -6+(5a-6)\lambda = 6+4\frac{7\lambda-5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a\lambda - 12\lambda = 3 - 7\lambda + 5 \\ -18+15a\lambda-18\lambda = 18+28\lambda-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3a-5)\lambda = 8 \\ (15a-46)\lambda = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3a-5}{15a-46} = \frac{8}{16} \Rightarrow 48a - 80 = 120a - 368 \Rightarrow 288 = 72a \Rightarrow \boxed{a=4}$$

Cuando a=4 las rectas r y s tienen, al menos, un punto en común, por lo que son coincidentes o secantes. Para decidir en cuál de estos casos estoy, compruebo si los vectores directores son proporcionales:

$\overrightarrow{v_r} = (7,0,14)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,-1,4)$ para que sean proporcionales debe cumplirse:

$\frac{7}{3} = \frac{0}{-1} = \frac{14}{4}$, que no es cierto, por lo que las rectas son secantes.

Cuando a≠4 las rectas r y s no tienen ningún punto en común, por lo que son paralelas o se cruzan. Para decidir en cuál de estos casos estoy, compruebo si los vectores directores son proporcionales:

$\vec{v_r} = (7, a-4, 5a-6)$ y $\vec{v_s} = (3,-1,4)$ para que sean proporcionales debe cumplirse:

$$\frac{7}{3} = \frac{a-4}{-1} = \frac{5a-6}{4} \Rightarrow \begin{cases} -7 = 3\text{a}-12 \\ 4a-16 = -5a+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3a \to a = \dfrac{5}{3} \\ 9a = 22 \to a = \dfrac{22}{9} \end{cases},$$

No coinciden, luego los vectores no son proporcionales y las rectas se cruzan.

a) Como hemos visto en el apartado anterior, las rectas se cortan cuando a = 4. En ese caso, para calcular el punto de corte escribimos las rectas en forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 7\lambda \\ y = 0 \\ z = -6+14\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5+3\mu \\ y = 1-\mu \\ z = 6+4\mu \end{cases}$$

Por la ecuación de r debe ser y = 0, por lo que llevando esto a la ecuación de s sabemos que μ =1. Por tanto, haciendo μ = 1 en la ecuación de s tenemos el punto de corte

$$\begin{cases} x = 5+3 = 8 \\ y = 0 \\ z = 6+4 = 10 \end{cases} \to (8,0,10).$$

CUESTIÓN B.3

Como $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+a & \text{si } x \le 0 \\ -x^2+bx+b+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua en todo R, debe ser continua en x = 0 por lo que debemos tener

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \ .$$

Observemos que f (0) = $0^2-3\cdot0+a$ = a mientras que

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-0^2+b\cdot 0+b+1\right) = b+1$$

Por lo tanto tenemos una primera relación entre a y b que es

a = b+1.

Por otra parte, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<0 \\ -2x+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como f (x) es derivable en todo R, debe ser derivable en x = 0 por lo que debemos tener

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

Ahora bien

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -2x+b = b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x-3 = -3$$

Por tanto debe ser b = −3 y, por la relación anterior, se tiene a = b+1 = −2.

CUESTIÓN B.4

Calculemos en primer lugar los puntos de inflexión de la curva $f(x)=\frac{3}{6+2x^2}$, es decir, los puntos que satisfacen la ecuación f‘’(x) = 0. Para ello, calculamos la primera y la segunda derivada de f (x):

$$f(x)=\frac{3}{6+2x^2} \to f'(x)=\frac{0\cdot\left(6+2x^2\right)-3\cdot 4x}{\left(6+2x^2\right)^2}=\frac{-12x}{\left(6+2x^2\right)^2}$$

$$f''(\text{x})=\frac{-12\cdot\left(6+2x^2\right)^2-(-12x)\cdot\left(2\left(6+2x^2\right)\cdot 4x\right)}{\left(6+2x^2\right)^4}=\frac{-12\cdot\left(6+2x^2\right)^2+96x^2\cdot\left(6+2x^2\right)}{\left(6+2x^2\right)^4}=$$

$$f''(x)=\frac{\cancel{\left(6+2x^2\right)}\left[-12\cdot\left(6+2x^2\right)+96x^2\right]}{\left(6+2x^2\right)^{\cancel{4}\ 3}}=\frac{-72-24x^2+96x^2}{\left(6+2x^2\right)^3}=\frac{-72+72x^2}{\left(6+2x^2\right)^3}$$

$$f''(x)=0 \to -72+72x^2=0 \to x^2=\frac{72}{72}=1 \to \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ Posibles puntos de inflexión}$$

Como la derivada segunda cambia de signo en su paso por 1 y -1, dichos puntos son puntos de inflexión.

Como la función $f(x)=\frac{3}{6+2x^2}$ es siempre positiva el área pedida es la integral definida de la función en el intervalo (-1, 1):

$$\acute{A}rea=\int_{-1}^{1}\frac{3}{6+2x^2}\,dx$$

Calculemos la primitiva $\int\frac{3}{6+2x^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{3+x^2}\,dx=$

Esta integral es del tipo arcotangente. En efecto, observando que:

$$\frac{1}{3+x^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Dividimos numerador y denominador por 3}\\ \text{para conseguir la expresion } 1+\text{y}^2\end{array}\right\}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}+\frac{x^2}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Entonces la integral queda como

$$\int \frac{3}{6+2x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{3+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \frac{x}{\sqrt{3}} = t \to x = \sqrt{3}\cdot t\\ dx = \sqrt{3}dt\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\sqrt{3}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg t = \left\{\begin{array}{c}\text{Deshaciendo el cambio de variable}\\ \frac{x}{\sqrt{3}} = t\end{array}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, aplicando la regla de Barrow tenemos que

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{1} \frac{3}{6+2x^2}\,dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{+1} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right] - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{-\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\ \text{unidades cuadradas}$$