UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Septiembre 2013

MATEMÁTICAS II. CÓDIGO 158

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos] Clasifique y resuelva, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ 4x+5y+2z=2 \end{cases}$$

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos A = (3, 4, 0), B = (2, 1, 0) y C = (5, 1, 0). El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por los puntos (1, 2, 3) y (−1, 4, 5).

a) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 6 unidades cúbicas.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}$

b) **[1,5 puntos]** $\lim_{x\to 0}\frac{sen x^2}{1-\cos x}$

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\frac{6}{x^2+2x-8}$

b) **[1 punto]** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre $x=-2$ y $x=0$.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) **[1,25 puntos]** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$.

b) **[1,25 puntos]** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$

.

CUESTIÓN B.2:

a) **[1 punto]** Determine la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A=(2,3,0) y B=(−1,8,1).

b) **[1,5 puntos]** Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (1,2,3) y es perpendicular a la recta r.

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Descomponga el número 48 como suma de dos números positivos de tal manera que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea el mayor valor posible.

CUESTIÓN B.4:

a) **[2 puntos]** Encuentre una primitiva de la función $f(x) = x^2 e^x$.

b) **[0,5 puntos]** Calcule la siguiente integral definida $\int_0^1 x^2 e^x dx$

SOLUCIONES –Es la resolución dada por el coordinador de la Universidad para PAU Math II

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1

a) La matriz de los coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\2&2&1\\4&5&2\end{pmatrix}$, mientras que la matriz ampliada es $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&1\\2&2&1&1\\4&5&2&2\end{array}\right)$

Estudiemos primero el rango de A. El determinante de A es |A| = 8+10+12−8−10−12 = 0.

Por lo tanto, Rango(A) < 3. Además, como $\begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$, vemos que A tiene al menos un menor de orden 2 distinto de cero y por lo tanto se tiene Rango(A) = 2.

Veamos ahora qué ocurre con el rango de la matriz ampliada. En este caso observamos que la columna 4 y la columna 3 de A^* son iguales, por lo que se tiene que

Rango(A^*) =Rango(A) = 2 <número de incógnitas.

De todo ello, y aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, concluimos que el sistema es Compatible Indeterminado (SCI).

b) Sabemos por el apartado anterior que el sistema es Compatible Indeterminado con Rango(A) = Rango(A_) = 2 < 3 =número de incógnitas.
Un menor de orden 2 distinto de cero que nos garantiza que el rango de A y de A^* es 2 es el menor $\begin{vmatrix}2&3\\2&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$

obtenido al seleccionar las filas 1 y 2 (ecuaciones 1 y 2) y las columnas 1 y 2 (incógnitas x e y). Por lo tanto podemos prescindir de la tercera ecuación y expresar las incógnitas x e y en función de la z, de modo que el sistema queda así:

$$\begin{cases}2x+3y+z=1\\2x+2y+z=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x+3y=1-z\\2x+2y=1-z\end{cases}\rightarrow \text{Restando las ecuaciones}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}2x+3y=1-z\\ \boxed{y=0}\end{cases}\rightarrow 2x+0=1-z\rightarrow \boxed{x=\frac{1-z}{2}}$$

$$\text{La solución del sistema es }\begin{cases}x=\dfrac{1-z}{2}\\ y=0\\ z=z\end{cases}$$

CUESTIÓN A.2

a) Llamamos P=(1,2,3) y Q=(−1,4,5). La recta r pasa por el punto P=(1,2,3) y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,2,2)$ o, equivalentemente, el vector (−1,1,1). Por tanto, la ecuación continua de r es:

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

Esto es suficiente para completar el apartado a).
No obstante, de cara al apartado b) del ejercicio, lo más práctico es obtener la ecuación paramétrica de la recta, que sería simplemente:

$$r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

b) El volumen del tetraedro viene dado por el valor absoluto de

$$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|$$

Donde D es un punto genérico de la recta r y por tanto tiene las coordenadas $D=(1-\lambda,2+\lambda,3+\lambda)$. Utilizando que

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,-3,0)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(2,-3,0)$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(-2-\lambda,-2+\lambda,3+\lambda)$

podemos calcular el determinante

$$\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2-\lambda & -2+\lambda & 3+\lambda \end{vmatrix}=3(3+\lambda)-(-6(3+\lambda))=27+9\lambda$$

$$Volumen=\frac{1}{6}(27+9\lambda)=6 \qquad Volumen=\frac{1}{6}(27+9\lambda)=-6$$

Por lo tanto $27+9\lambda=36$ O bien $27+9\lambda=-36$

$+9\lambda=36-27$ $\qquad$ $+9\lambda=-36-27$

$\lambda=1$ $\qquad$ $\lambda=-7$

En definitiva, las dos posibles soluciones son D = (0,3,4) (para λ= 1) y D = (8,−5,−4) (para λ = −7).

CUESTIÓN A.3

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)}=$$

$$\boxed{\text{Calculemos } \left(x^2+2\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)=\left(x^2+2\right)\cdot\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+1}{x^2-1}\right)=\frac{2x^2+4}{x^2-1}}$$

$$e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+4}{x^2-1}}=\boxed{e^2}$$

b) En este caso tenemos una indeterminación del tipo 0/0 ya que

$$\lim_{x\to0}\frac{senx^2}{1-\cos x}=\frac{sen0}{1-\cos0}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to0}\frac{senx^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2\cdot2x}{0+senx}=\frac{\cos0\cdot2\cdot0}{0+sen0}=\frac{0}{0}=(L'\text{Hopital})=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{senx^2\cdot2x+\cos x^2\cdot2}{\cos x}=\frac{sen0\cdot2\cdot0+\cos0\cdot2}{\cos0}=\frac{2}{1}=2$$

CUESTIÓN A.4

a) Se trata de la primitiva de una función racional donde el numerador es una constante (polinomio de grado 0) y el denominador es un polinomio de grado 2. Estudiamos las raíces del denominador y tenemos que

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}=\begin{cases}=2\\=-4\end{cases}$$

Se trata pues de dos raíces reales simples. Veamos cómo es la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)}=\frac{x(A+B)+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

Por lo tanto A y B vienen dados por

$$\begin{cases}A+B=0\\4A-2B=6\end{cases}\to\begin{cases}A+B=0\\2A-B=3\end{cases}\to\text{Sumando las ecuaciones 3A=3}\to\text{A=1}$$

y por tanto de la primera ecuación B=-1

$$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+4}$$

$$\int\frac{6}{x^2+2x-8}dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{-1}{x+4}dx=\ln|x-2|-\ln|x+4|=\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+K$$

b) En primer lugar observamos que la función f (x) es negativa entre x = −2 y x = 0. Por lo tanto, el área encerrada viene dada por

$$Área = \left| \int_{-2}^{0} \frac{6}{x^2+2x-8}\, dx \right| = \left| \ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right| \right|_{-2}^{0} = \ln\left|\frac{0-2}{0+4}\right| - \ln\left|\frac{-2-2}{-2+4}\right| = \left|\ln 0'5 - \ln 2\right| = \left|\ln 0'25\right|$$

En definitiva,

Área = $\left|\ln 0'25\right|$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1

a) Intercambiando las filas primera y tercera se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Ahora, sacando el 3 como escalar común en la primera fila y metiéndolo en la segunda fila se tiene que

$$= -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

b) Restando a la fila tercera la fila primera ($F_3 - F_1$) y restando a continuación a la fila segunda la fila primera multiplicada por 2 ($F_2 - 2F_1$) se concluye que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+6 & 2b & 2c+3 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

CUESTIÓN B.2

a) La recta r pasa por el punto A = (2,3,0) y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,5,1)$. Por tanto, la ecuación continua de r es

$$r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1}$$

b) El plano p pasa por el punto (1,2,3) y tiene como vector perpendicular el vector director de la recta r, es decir, el vector $\overrightarrow{AB} = (-3,5,1)$. Por lo tanto su ecuación general o implícita es

$$-3x + 5y + z + D = 0$$

donde D tiene que calcularse con la condición de que el plano pase por el punto (1,2,3).
Es decir, D debe cumplir $-3+10+3+D=0 \rightarrow D=-10$ y la solución es

$$-3x + 5y + z - 10 = 0$$

CUESTIÓN B.3

Se trata de descomponer 48 como una suma del tipo $48 = x + y$, donde x e y son números positivos tales que la expresión x^3y. Para ello, despejamos

$$y = 48 - x$$

y se trata entonces de encontrar el valor de x para el cual se cumple que

- $0 < x < 48$ (puesto que tanto x como $y = 48 - x$ deben ser positivos), y
- la función $f(x) = x^3(48-x)$ debe alcanzar su máximo en dicho valor de x.

Para ello, hacemos la derivada de $f(x)$ y estudiamos sus puntos críticos. Como $f(x) = x^3(48-x) = -x^4 + 48x^3$, se tiene

$$f'(x) = -4x^3 + 144x^2 = 4x^2(-x+36)$$

Por tanto $f'(x) = 0$ si y solo si x = 0 o x = 36. El valor x = 0 no nos sirve porque debe ser x > 0. Así que el único candidato a ser punto de máximo que queda es x = 36. Comprobamos que en efecto es punto de máximo haciendo, por ejemplo, el test de la segunda derivada.
En efecto,

$$f''(x) = -12x^3 + 288x^2$$

y se tiene $f''(36) = -12\cdot 36^3 + 288\cdot 36^2 = -12\cdot 36\cdot 36^2 + 288\cdot 36^2 = -432\cdot 36^2 + 288\cdot 36^2 < 0$.
Otra forma de comprobar esto igualmente válida es comprobar que $f'(x) > 0$ si x < 36 y $f'(x) < 0$ si x > 36. Ello significa que la función f (x) es creciente a la izquierda de 36 y es decreciente a la derecha de 36, por lo que en x = 36 hay un máximo.

En definitiva, la solución es x = 36 e y = 48−36 = 12, de modo que la descomposición es 48 = 36+12.

CUESTIÓN B.4

a)

$$\int x^2 e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ \text{u=x}^2 \rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = \text{x}^2 \cdot e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= \text{x}^2 \cdot e^x - 2\int xe^x dx = = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos, de nuevo, por partes} \\ \text{u=x} \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= \text{x}^2 \cdot e^x - 2\left(\text{x}\cdot e^x - \int e^x dx\right) = \text{x}^2 \cdot e^x - 2\left(\text{x}\cdot e^x - e^x\right) =$$

$$= \text{x}^2 \cdot e^x - 2\text{x}\cdot e^x + 2e^x = \boxed{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)}$$

b) Aplicando la regla de Barrow y utilizando la primitiva calculada en el apartado anterior, se tiene

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left| e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)\right|_0^1 = \left(e^1\left(1^2 - 2\cdot 1 + 2\right)\right) - \left(e^0\left(0^2 - 2\cdot 0 + 2\right)\right) =$$

$$= \boxed{e - 2}$$