PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2015

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+az & = & 1 \\ x+ay+z & = & a \\ ax+y+z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=-2$.

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A=(2,1,0)$, $B=(3,4,0)$ y $C=(5,1,0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto $(1,2,3)$ y tiene como vector director el vector $(-1,1,1)$.

a) **[0,75 puntos]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.
Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 punto]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) **[1,25 puntos]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

c) **[0,25 puntos]** ¿Es continua la función $f(x)=\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en $x=0$? Justifique la respuesta.

CUESTIÓN A.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int 2x \operatorname{arctg} x\, dx$.

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x)=2x\operatorname{arctg}x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0,-2)$.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es **involutiva** si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) **[0,5 puntos]** Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \quad \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{y} \quad \pi : 2x+y+z = -7$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

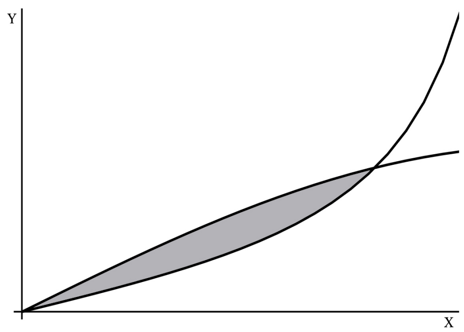
b) **[1,25 puntos]** Determine el plano que pasa por el punto $P = (2,-3,3)$, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \ln(x^2) + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

CUESTIÓN B.4: Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones $f(x) = 2\operatorname{sen}x$ y $g(x) = \operatorname{tg}x$ en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) **[0,75 puntos]** Determine los puntos de corte de dichas gráficas.

b) **[1,75 puntos]** Calcule el área de dicho recinto.