PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2015

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1:

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de a = −2.

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos A=(2,1,0), B=(3,4,0) y C=(5,1,0). El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto (1, 2, 3) y tiene como vector director el vector (−1, 1, 1).

a) **[0,75 puntos]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 punto]** Calcule $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) **[1,25 puntos]** Calcule $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$

c) **[0,25 puntos]** ¿Es continua la función $f(x)=\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en x = 0? Justifique la respuesta.

CUESTIÓN A.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int 2x\,arctgx\; dx$.

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función f (x) = 2x arctgx, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0,−2).

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada A es **involutiva** si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) **[0,5 puntos]** Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).

b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad y \quad \pi: 2x + y + z = -7$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.

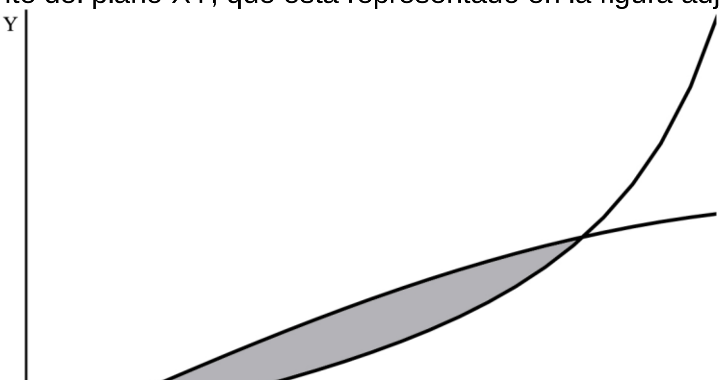
b) **[1,25 puntos]** Determine el plano que pasa por el punto P = (2,−3,3), es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & si \quad x \leq 1 \\ \ln(x^2) + b & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f (x) es continua y derivable en todo R.

CUESTIÓN B.4: Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones f (x) = 2senx y g(x) = tgx en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) **[0,75 puntos]** Determine los puntos de corte de dichas gráficas.

b) **[1,75 puntos]** Calcule el área de dicho recinto.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1

a) **[1,5 puntos]** Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

b) **[1 punto]** Si es posible, resuélvalo para el valor de a = −2.

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$ Si triangulamos la matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ a dicho sistema de ecuaciones, haciendo Fila 2ª – Fila 1ª → $\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ -1 & -1 & -a & -1 \\ \hline 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}$ Cambiamos la fila 2ª por esta nueva obtenida $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Ahora hacemos Fila 3ª- a·Fila 1ª → $\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ -a & -a & -a^2 & -a \\ \hline 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}$ Ahora reemplazamos la Fila 3ª por esta nueva obtenida, quedando la matriz asociada al sistema como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Para terminar basta hacer Fila 3ª+Fila 2ª → $\begin{array}{ccc|c} 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \\ \hline 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}$, con este resultado reemplazamos la Fila 3ª por esta, quedando $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right)$

Estudiemos ahora el rango de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$ y el de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(2-a-a^2)=0$$

Cuando a=1 o bien cuando $2-a-a^2=0 \Rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4(-1)2}}{2(-1)}=\dfrac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} =\dfrac{1+3}{-2}=-2 \\ =\dfrac{1-3}{-2}=1 \end{cases}$

CASO 1º. <u>"a" distinto de 1 y -2</u> → El rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada es 3 e igual al número de incógnitas del sistema, por lo que el **Sistema es Compatible Determinado**.

CASO 2º. <u>a=1</u>→ A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ también, siendo menor que el número de incógnitas (3). El **Sistema es Compatible Indeterminado**.

CASO 3º. <u>a=-2</u> → A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ también es 2, ya que toda una fila son ceros. Y es menor que el número de incógnitas (3). El **Sistema es Compatible Indeterminado**.

b) Para a=-2 el sistema es Compatible Indeterminado, siendo equivalente $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{array}\right\}$ al

$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=-3 \\ 0=0 \end{array}\right\}$. Resolvamos este último, dando a $\boxed{z=\lambda}$ →

$-3y+3\lambda=-3 \rightarrow -3y=-3-3\lambda \rightarrow \boxed{y=1+\lambda}$ Y a partir del valor de z e y →

$x+1+\lambda-2\lambda=1 \rightarrow x=1-1-\lambda+2\lambda \rightarrow \boxed{x=\lambda}$

La solución es $\boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$

CUESTIÓN A.2

CUESTIÓN A.2: Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos A=(2,1,0), B=(3,4,0) y C=(5,1,0). El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto (1, 2, 3) y tiene como vector director el vector (−1, 1, 1).

a) **[0,75 puntos]** Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) **[1,75 puntos]** Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

a) La ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1,2,3) y tiene vector director (-1,1,1) son:

$$\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

b) El volumen del tetraedro es la sexta parte del módulo del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$, siendo D el punto genérico de la recta anterior.

$$\left.\begin{matrix} A=(2,1,0) \\ \mathrm{B}=(3,4,0) \\ \mathrm{C}=(5,1,0) \\ \mathrm{D}=(1-\lambda,2+\lambda,3+\lambda) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = B-A = (3,4,0)-(2,1,0)=(1,3,0) \\ \overrightarrow{AC} = (5,1,0)-(2,1,0)=(3,0,0) \\ \overrightarrow{AD} = (1-\lambda,2+\lambda,3+\lambda)-(2,1,0) = (-1-\lambda,1+\lambda,3+\lambda) \end{cases}$$

$$Volumen = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|(1,3,0)\cdot\left((3,0,0)\times(-1-\lambda,1+\lambda,3+\lambda)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-\lambda & 1+\lambda & 3+\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(0+0+0-\left(0+27+9\lambda+0\right)\right)\right| = \left|\frac{27+9\lambda}{6}\right|$$

Como el volumen debe ser 9 → $\left|\frac{27+9\lambda}{6}\right| = 9 \Rightarrow \begin{cases} \frac{27+9\lambda}{6} = 9 \Rightarrow 27+9\lambda = 54 \Rightarrow 9\lambda = 27 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3} \\ \frac{27+9\lambda}{6} = -9 \Rightarrow 27+9\lambda = -54 \Rightarrow 9\lambda = -81 \Rightarrow \boxed{\lambda = -9} \end{cases}$

El punto D pedido puede ser uno de los dos siguientes:

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda = 1-3 = -2 \\ y = 2+\lambda = 2+3 = 5 \Rightarrow \boxed{D_1 = (-2,5,6)} \\ z = 3+\lambda = 3+3 = 6 \end{cases}$$

$$\lambda = -9 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda = 1+9 = 10 \\ y = 2+\lambda = 2-9 = -7 \Rightarrow \boxed{D_2 = (10,-7,-6)} \\ z = 3+\lambda = 3-9 = -6 \end{cases}$$

CUESTIÓN A.3

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 punto]** Calcule $\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) **[1,25 puntos]** Calcule $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$

c) **[0,25 puntos]** ¿Es continua la función $f(x) = \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en x = 0? Justifique la respuesta.

a) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}=\frac{2+e^{1/0^-}}{1+e^{2/0^-}}=\frac{2+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}}=\frac{2+0}{1+0}=\boxed{2}$ Ya que el número **e** es mayor que 1 y por ello $e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$

b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}=\frac{2+e^{1/0^+}}{1+e^{2/0^+}}=\frac{2+e^{+\infty}}{1+e^{+\infty}}=\frac{2+\infty}{1+\infty}=\text{Indeterminación (Regla de L'Hopital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{-2}{x^2}e^{2/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{0^+}}=\frac{1}{2}e^{-\infty}=\frac{1}{2}\cdot 0=\boxed{0}$$

c) Los limites laterales $\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}=2\neq 0=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en x=0 no coinciden.

$\boxed{\text{No es continua en x=0}}$

CUESTIÓN A.4

CUESTIÓN A.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int 2x\,arctgx\ dx$.

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función f (x) = 2x arctgx, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0,−2).

a)

$$\int 2x\,arctgx\ dx=\text{Integramos por partes}\ \left\{\begin{array}{l} u=arctgx\rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=2xdx\rightarrow v=\int 2xdx=x^2\end{array}\right\}=$$

$$\left\{\int udv=u\cdot v-\int vdu\right\}=x^2\cdot arctgx-\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=x^2\cdot arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=x^2\cdot arctgx-\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=x^2\cdot arctgx-\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\boxed{x^2\cdot arctgx-x+arctgx+K}$$

b) De todas las primitivas de la función obtenidas en el apartado a)

$F(x)=x^2\cdot arctgx-x+arctgx+K$

Determinamos el valor de K para que F(0)=-2

$F(0)=0^2\cdot arctg0-0+arctg0+K=-2$

$\boxed{k=-2}$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x)=x^2\cdot arctgx-x+arctgx-2}$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Se dice que una matriz cuadrada A es **involutiva** si cumple que $A^2 = I$, donde I denota la matriz identidad.
a) **[0,5 puntos]** Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).
b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es involutiva

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Si $A^2 = I \rightarrow A\cdot A=I$, se cumple que la inversa de la matriz A es ella misma y por tanto tiene inversa y es regular.

b) $$A^2=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Como debe ser igual a la matriz identidad de orden 3

$$\begin{pmatrix} a^2+a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2a^2=1\rightarrow a^2=\dfrac{1}{2}\rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}} \\ b^2=1\rightarrow b=\sqrt{1}\rightarrow \boxed{b=\pm 1} \end{cases}$$

CUESTIÓN B.2

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2} \quad y \quad \pi: 2x+y+z=-7$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r corta al plano π y calcule el ángulo que forman.
b) **[1,25 puntos]** Determine el plano que pasa por el punto P = (2,−3,3), es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

a) El vector director de la recta es $\vec{v}=(1,-1,2)$ y el vector normal al plano es $\vec{n}=(2,1,1)$, si comprobamos que no son ortogonales (90º), recta y plano se cortan en un punto.

$$\cos(\vec{v},\vec{n})=\frac{(1,-1,2)\cdot(2,1,1)}{|(1,-1,2)|\cdot|(2,1,1)|}=\frac{2-1+2}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$\cos(\vec{v},\vec{n})=\frac{1}{2}\Rightarrow$ El ángulo formado por la recta y el vector normal al plano es 60º

$\boxed{\text{El ángulo formado por el plano y la recta es de 60º}}$

b) Si es perpendicular al plano π entonces su vector normal $\vec{n}=(2,1,1)$ es un vector director del plano pedido, el otro vector necesario lo tenemos en el vector director de la recta r → $\vec{v}=(1,-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(2,1,1)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\\ P(2,-3,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-2 & y+3 & z-3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$2\cdot(x-2)+(y+3)-2(z-3)-\left[z-3+4(y+3)-(x-2)\right]=0$$

$$2x-4+y+3-2z+6-z+3-4y-12+x-2=0$$

$$3x-3y-3z-6=0$$

$$\boxed{x-y-z-2=0}$$

CUESTIÓN B.3

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos] Considere la función dada por

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax-3 & si \quad x\le 1\\ \ln(x^2)+b & si \quad x>1\end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función f (x) es continua y derivable en todo R.

Las dos funciones son continuas en la zona donde se definen y para ser continua en x=1 deben ser iguales los limites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln(x^2)+b=\ln 1+b=0+b=b\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2+ax-3=1+a-3=a-2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{b=a-2}$$

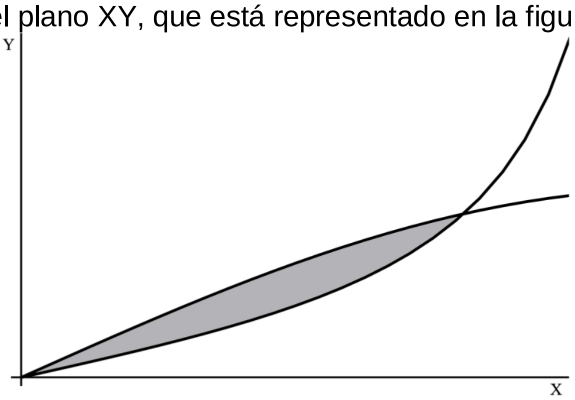
Y para ser derivable en x=1 deben coincidir el valor de las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x}=2\\ \lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}2x+a=2+a\end{array}\right\}\Rightarrow 2=2+a\Rightarrow\boxed{a=0}$$

Uniendo ambas condiciones **a=0** y **b=-2**

CUESTIÓN B.4

CUESTIÓN B.4: Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones f (x) = 2senx y g(x) = tgx en el primer cuadrante del plano XY, que está representado en la figura adjunta.



a) **[0,75 puntos]** Determine los puntos de corte de dichas gráficas.
b) **[1,75 puntos]** Calcule el área de dicho recinto.

a) Los puntos de corte son las soluciones de la ecuación

$$2senx = tgx$$

$$2senx = \frac{senx}{\cos x}$$

$$2senx \cdot \cos x = senx$$

$$2senx \cdot \cos x - senx = 0$$

$$senx(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} senx = 0 \Rightarrow x = 0^o = 0 \text{ radianes } + k\pi \text{ radianes} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^o = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ radianes} \\ x = 300^o = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ radianes} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte del dibujo son $\boxed{(0,0) \ y \ (\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})}$

b) Área =Integral definida entre 0 y π/3 de la diferencia entre las dos funciones

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2senx - tgx)\,dx = \left[-2\cos x + \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-2\cos\frac{\pi}{3} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|\right) - \left(-2\cos 0 + \ln|\cos 0|\right) =$$

$$= \left(-1 - \ln 2\right) + 2 = \boxed{1 - \ln 2 \text{ unidades cuadradas}}$$