UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2015

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) **[1,25 puntos]** Calcule $\mathbf{C = A^t \cdot A - B \cdot B^t}$, donde $\mathbf{A^t}$ y $\mathbf{B^t}$ denotan, respectivamente, las matrices traspuestas de A y B.

b) **[1,25 puntos]** Halle una matriz X tal que X ·C = D, siendo

$$D=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

.

CUESTIÓN A.2: Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[0,25 puntos]** Calcule los puntos medios de los tres lados del triángulo de vértices A = (5, 3, 6), B = (−1, −1, 2) y C = (5, 7, 4).

b) **[1 punto]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.

c) **[1,25 puntos]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

CUESTIÓN A.3: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}$

b) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$

CUESTIÓN A.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int tg^2(x)dx$

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x) = tg^2(x)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(\pi/4, 1)$.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Se dice que una matriz cuadrada A es **idempotente** si cumple que $\mathbf{A^2 = A}$.

a) **[0,5 puntos]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente $\mathbf{A^{2015}}$.
b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad y \quad \pi : x - 2y + z = -3$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.
b) **[1,25 puntos]** Determine la recta que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π .

CUESTIÓN B.3: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) **[1 punto]** $f(x) = x{\cdot}ln(x),\ \text{con} \quad x > 0$.
b) **[1,5 puntos]** $\mathrm{g}(x) = \dfrac{x^2}{e^x}, \quad \text{con x} \in \mathbb{R}$

CUESTIÓN B.4:
a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida $\int ln(1+x^2)dx$
b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x) = ln(1+x^2)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0, −2)

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad y\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

a) **[1,25 puntos]** Calcule **C = A^t·A−B·B^t**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{A}^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}^t\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Halle una matriz X tal que X ·C = D, siendo

$$X\cdot C=D\rightarrow X=D\cdot C^{-1}=\text{Necesitamos hallar la inversa de la matriz C}$$

$$C^{-1}=\frac{Adj(C^T)}{Det(C)}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-0'5 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=D\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0'5 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

.

CUESTIÓN A.2: Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por el vértice de un triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

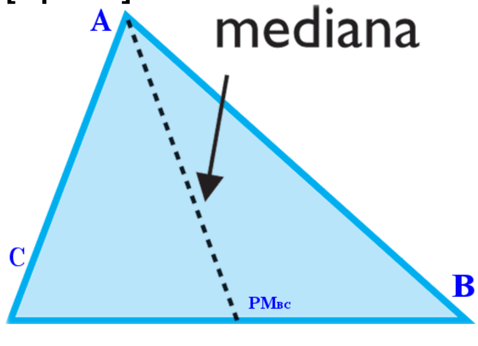
a) **[0,25 puntos]** Calcule los puntos medios de los tres lados del triángulo de vértices A = (5, 3, 6), B = (−1, −1, 2) y C = (5, 7, 4).

$$\text{Punto medio del lado AB}=PM_{AB}=\frac{A+B}{2}=\frac{(5,3,6)+(-1,-1,2)}{2}=\frac{(4,2,8)}{2}=(2,1,4)$$

$$\text{Punto medio del lado AC}=PM_{AC}=\frac{A+C}{2}=\frac{(5,3,6)+(5,7,4)}{2}=\frac{(10,10,10)}{2}=(5,5,5)$$

$$\text{Punto medio del lado BC}=PM_{BC}=\frac{B+C}{2}=\frac{(-1,-1,2)+(5,7,4)}{2}=\frac{(4,6,6)}{2}=(2,3,3)$$

b) **[1 punto]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas de dicho triángulo.



Mediana del vertice A y punto medio del lado BC,

tiene un punto A$(5,3,6)$ y el vector $\overrightarrow{A\,PM_{BC}}=(2,3,3)-(5,3,6)=(-3,0,-3)$, tomamos el vector $(1,0,1)$:

$$\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=3 \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

Mediana del vertice B y punto medio del lado AC,

tiene un punto B$(-1,-1,2)$ y el vector $\overrightarrow{B\,PM_{AC}}=(5,5,5)-(-1,-1,2)=(6,6,3)$, tomamos el vector $(2,2,1)$:

$$\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=2+\alpha \end{cases}$$

Mediana del vertice C y punto medio del lado AB,

tiene un punto C$(5,7,4)$ y el vector $\overrightarrow{C\,PM_{AB}}=(2,1,4)-(5,7,4)=(-3,-6,0)$, tomamos el vector $(1,2,0)$:

$$\begin{cases} x=5+\beta \\ y=7+2\beta \\ z=4 \end{cases}$$

c) **[1,25 puntos]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Voy a determinar el punto de corte de dos de las rectas (medianas) y luego a comprobar que ese punto está en la otra mediana

Mediana del vertice A y punto medio del lado BC,

$$\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=3 \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

Mediana del vertice B y punto medio del lado AC,

$$\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=2+\alpha \end{cases}$$

Mediana del vertice C y punto medio del lado AB,

$$\begin{cases} x=5+\beta \\ y=7+2\beta \\ z=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

En la última recta z=4, si sustituimos en la segunda $\rightarrow$ z=4=2+α $\rightarrow$ α=2

Luego y=-1+4 $\rightarrow$ x=-1+4=3

El punto de corte de la mediana segunda y tercera es M(3,3,4)

Sustituimos en la primera y tercera ecuación y comprobemos que también está el punto M en dichas rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mediana del vertice A y punto medio del lado BC,}\\ \begin{cases}3=5+\lambda\\ 3=3\\ 4=6+\lambda\end{cases}\\ \text{Mediana del vertice C y punto medio del lado AB,}\\ \begin{cases}3=5+\beta\\ 3=7+2\beta\\ 4=4\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}3=5+\lambda\Rightarrow\lambda=-2\\ 4=6+\lambda\Rightarrow\lambda=-2\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}3=5+\beta\Rightarrow\beta=-2\\ 3=7+2\beta\Rightarrow 2\beta=-4\Rightarrow\beta=-2\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Comprobado que el punto M (3,3,4) es el punto de corte de las tres rectas (medianas)

CUESTIÓN A.3: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 puntos]**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación del tipo nº e}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x+3}\cdot\left(\frac{x-6}{x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x+3}\cdot\left(\frac{x-6-x-1}{x+1}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{x+3}\cdot\left(\frac{-7}{x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7x^2-35}{x^2+4x+3}}=\boxed{e^{-7}}$$

b) **[1,25 puntos]**

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\text{ Indeterminación }=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-x}{x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

CUESTIÓN A.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida

$$\int tg^2(x)\,dx=\int\frac{sen^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2x}-1\,dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}-\int 1\,dx=\boxed{tgx-x+C}\text{, siendo C un parametro desconocido}$$

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x)=tg^2(x)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(\pi/4,1)$.

$$F(x)=\int tg^2(x)\,dx=\boxed{tgx-x+C}\text{, como para x=}\frac{\pi}{4}\text{ la primitiva vale 1,}$$

sustituyamos en lo obtenido y determinemos el valor de C

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+C=1\Rightarrow 1-\frac{\pi}{4}+C=1\Rightarrow\boxed{C=\frac{\pi}{4}}$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x)=tgx-x+\frac{\pi}{4}}$

CUESTIÓN B.1: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Se dice que una matriz cuadrada A es **idempotente** si cumple que **A^2 = A**.

a) **[0,5 puntos]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente **A^{2015}**.

$$A^2 = A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

Repitiendo este proceso se aprecia claramente que $A^{2015}=A$

b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a^2 & -a^2-a^2 & 0 \\ -2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

Como debe ser igual a la matriz de partida $A = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 2a^2 & -2a^2 & 0 \\ -2a^2 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = a \to 2a^2 - a = 0 \to a(2a-1) = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ b^2 = b \to b^2 - b = 0 \to b(b-1) = 0 \to \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \end{cases}$$

CUESTIÓN B.2: Observación: Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.
Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad y \quad \pi : x - 2y + z = -3$$

a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

Vamos a obtener un punto y un vector dirección de la recta: r : $P(1,0,2)$ y $\vec{v} = (3,4,5)$

Además el vector $\vec{n} = (1,-2,\ 1)$ es ortogonal a π.

Como el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{n} = (1,-2,\ 1) \cdot (3,4,5) = 3 - 8 + 5 = 0$

Esto indica que son ortogonales entre si y por tanto recta y plano son paralelos o coincidentes. Averigüemos la distancia entre ellos (si esta es nula son coincidentes y si no es nula serán paralelos)

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,2) \text{ es un punto de la recta } r \\ \text{Ecuación del plano } \pi : x - 2y + z + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi) = d(\mathrm{P},\pi) = \left| \frac{1 - 0 + 2 + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{6}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6}$$

Como es distinta de cero son paralelos, separados por una distancia de $\sqrt{6}$

b) **[1,25 puntos]** Determine la recta que pasa por el punto *P* = (1, 0, 2) y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.
Dicha recta tendrá como vector director el normal al plano y por tanto de ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,2) \\ \vec{v}=(1,-2,1) \end{array}\right\} \rightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=0-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{array}\right.$$

Para hallar la intersección de la recta **s** y el plano π, sustituyamos en la ecuación del plano las tres expresiones que son la ecuación de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z+3=0 \\ x=1+\lambda \\ y=0-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda-2(-2\lambda)+2+\lambda+3=0 \Rightarrow 1+\lambda+4\lambda+2+\lambda+3=0 \Rightarrow 6+6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

El punto de intersección es Q= $\left\{\begin{array}{l} x=1-1=0 \\ y=0-2(-1)=2 \Rightarrow \boxed{Q=(0,2,1)} \\ z=2-1=1 \end{array}\right.$

CUESTIÓN B.3:

Calcule los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) **[1 punto]** $f(x)=x\cdot ln(x),$ con $x>0$.

Calculamos la derivada $f'(x)=ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}=ln(x)+1$**,** si la igualamos a cero

$f'(x)=ln(x)+1=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow \boxed{x=e^{-1}}$

Utilizando la segunda derivada: $f''(x)=\frac{1}{x}$ **,** sustituimos el valor $x=e^{-1}$ y obtenemos:

$f''(e^{-1})=\frac{1}{e^{-1}}=e>0$ $\boxed{\text{Luego el punto } \mathbf{x=e^{-1}} \text{ es un punto mínimo}}$

b) **[1,5 puntos]** $g(x)=\frac{x^2}{e^x},$ con $x\in\mathbb{R}$

Calculamos la derivada $g'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(2x-x^2)}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}$ **,** si la igualamos a cero

$g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=0 \Rightarrow 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Como la segunda derivada resulta engorrosa de utilizar, tendremos en cuenta el signo de la derivada antes de 0, entre 0 y 2 y el signo después de 2:

· Antes de x=0 → $g'(-1)=\frac{2(-1)-(-1)^2}{e^{-1}}=\frac{-2-1}{+}<0$ **La función decrece**

· Entre x=0 y x=2 → $g'(1)=\frac{2(1)-(1)^2}{e^{-1}}=\frac{2-1}{+}=\frac{1}{+}>0$ **La función crece**

· Después de x=2 → $g'(3)=\frac{2\cdot 3-3^2}{e^{-1}}=\frac{6-9}{+}=\frac{-3}{+}<0$ **La función decrece**

Conclusión: x= 0 es un punto mínimo de la función y x=2 es un punto máximo de la función

CUESTIÓN B.4:

a) **[2 puntos]** Calcule la integral indefinida

$$\int ln(1+x^2)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ \text{u=}ln(1+x^2) \rightarrow du = \dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \cdot ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}dx = x \cdot ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x \cdot ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx = x \cdot ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx = \boxed{x \cdot ln(1+x^2) - 2x + 2arctgx + C}$$

b) **[0,5 puntos]** De todas las primitivas de la función $f(x) = ln(1+x^2)$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas (0, −2)

Como la primitiva es $F(x) = x \cdot ln(1+x^2) - 2x + 2arctgx + C$, sustituimos x por 0 e y por -2 y determinemos el valor de C:

$$F(0) = 0 \cdot ln(1+0^2) - 2 \cdot 0 + 2arctg0 + C = -2$$
$$0 - 0 + 0 + C = -2 \Rightarrow C = -2$$

Y la primitiva buscada es $F(x) = x \cdot ln(1+x^2) - 2x + 2arctgx - 2$