PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2016

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = A+B.

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos P = (2, 7, 3), Q = (1, 2, 5) y R = (−1, −2, 5).

a) **[1 punto]** Calcule el área del triángulo PQR.

b) **[0,5 puntos]** Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR.

c) **[1 punto]** Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$.

b) **[1,25 puntos]** $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{senx(1-senx)}{\cos^2 x}$.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int \dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

b) **[1 punto]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=2$, y la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{cases}$$

a) **[1 punto]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para ***a = 1***.

b) **[1 punto]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0) y R = (0, 0, 1).

a) **[1,25 puntos]** Estudie si el triángulo PQR es o no rectángulo en el vértice P.

b) **[1,25 puntos]** Dado el punto S = (1, 2, 3), calcule el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y S .

CUESTIÓN B.3: El número de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función $f(x)=\dfrac{90x}{x^2+2x+9}$,
donde x es el tiempo transcurrido, medido en días, desde que se inició el contagio.

a) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es el número de personas enfermas el cuarto día?

b) **[1,5 puntos]** ¿Qué día se alcanza el máximo número de personas enfermas? ¿Cuál es ese número máximo?

c) **[0,5 puntos]** ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta. (Indicación: calcule el límite de f (x) cuando $x \to +\infty$ y observe qué ocurre.)

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^x dx$.

b) **[1 punto]** Obtenga una primitiva F(x) de la función $f(x)=x^2e^x$ que cumpla la condición $F(0)=1$.

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ **.**

a) **[1,5 puntos] Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.**

$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ tiene como determinante $\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4+3=6\neq 0$ Por lo que la matriz A es invertible

$B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ tiene como determinante $\begin{vmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$ Por lo que la matriz B es invertible

$$A^T=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

b) **[1 punto] Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = A+B.**

$$AXB=A+B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(A+B\right)\cdot B^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}4 & 0\\ -16 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}4 & 8\\ 20 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-5}{3} & \frac{-4}{3}\end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A.2: Considere los puntos P = (2, 7, 3), Q = (1, 2, 5) y R = (−1, −2, 5).

a) **[1 punto] Calcule el área del triángulo PQR.**
El área se calcula con el módulo del producto vectorial de los vectores que van de P a Q y de P a R:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=\left(1,2,5\right)-\left(2,7,3\right)=\left(-1,-5,2\right)\\ \overrightarrow{PR}=\left(-1,-2,5\right)-\left(2,7,3\right)=\left(-3,-9,2\right)\end{array}\right\}Área=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ -1 & -5 & 2\\ -3 & -9 & 2\end{matrix}\right\|}{2}=\frac{\left|\left(8,-4,-6\right)\right|}{2}=$$

$$Área=\frac{\sqrt{8^2+4^2+6^2}}{2}=\frac{\sqrt{116}}{2}=\boxed{\sqrt{29}\,u^2}$$

b) **[0,5 puntos] Determine la ecuación general (o implícita) del plano que contiene al triángulo PQR.**
Tenemos el vector normal al plano $\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(8,-4,-6\right)$ y un punto (por ejemplo) P=(2, 7, 3)
La ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\ 8x-4y-6z+D=0\\ P(2,7,3)\end{array}\right\}\Rightarrow 8\cdot 2-4\cdot 7-6\cdot 3+D=0\Rightarrow 16-28-18+D=0\Rightarrow D=30$$

La ecuación del plano pedido es π: $8x-4y-6z+30=0$

c) **[1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por P, está contenida en el plano que contiene al triángulo PQR y es perpendicular al lado QR.**

Necesitamos un vector director de la recta, y para ello tenemos dos condiciones:

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Ortogonal a } \overrightarrow{QR}\\ \textit{Ortogonal al vector normal del plano } \pi\end{array}\right\}\Rightarrow \text{El vector director es el producto vectorial de } \overrightarrow{\text{QR}} \text{ y } \vec{\text{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QR}=(-1,-2,5)-(1,2,5)=(-2,-4,0)\\ \vec{n}=(8,-4,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & -4 & 0\\ 8 & -4 & -6\end{vmatrix}=(24,-12,40)$$

Utilicemos como vector director el obtenido dividido entre $4\rightarrow \vec{v}=(6,-3,10)$

La ecuación de la recta es:

$$\left.\begin{array}{l}P(2,7,3)\\ \vec{v}=(6,-3,10)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=2+6\lambda\\ y=7-3\lambda\\ z=3+10\lambda\end{cases}}$$

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 puntos]**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=\frac{0}{0}=\left\{\begin{array}{l}\text{Indeterminación}\\ \text{Resuelve con conjugado}\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-\left(\sqrt{4-x}\right)^2}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4+x-(4-x)}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4+x-4+x}{4x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=$$

.

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cancel{x}}{4\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{4\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=\frac{2}{4\cdot 4}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

b) **[1,25 puntos]**

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{senx(1-senx)}{\cos^2 x}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{senx-sen^2x}{\cos^2 x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\left\{\begin{array}{l}\text{Indeterminación } \dfrac{0}{0}\\ \text{Resuelvo por L'Hopital}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x-2\cdot senx\cdot\cos x}{2\cdot\cos x\cdot(-senx)}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos x-2\cdot senx\cdot\cos x}{-2\cdot\cos x\cdot\text{senx}}=\{\text{Saco factor común } \cos x\}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cancel{\cos x}\,(1-2senx)}{-2\cdot\cancel{\cos x}\cdot\text{senx}}=$$

$$=\lim_{x\to \pi/2}\frac{1-2senx}{-2\,\text{senx}}=\frac{1-2}{-2}=\frac{-1}{-2}=\boxed{0'5}$$

.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida**

$$\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable,}\\ \text{al ser la derivada de } x^2+x+1 \text{ el numerador } 2x+1\\ x^2+x+1=t \Rightarrow (2x+1)\,dx = dt\end{array}\right\} = .$$

$$= \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{x^2+x+1} + C$$

b) **[1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales** $x=0$ **y** $x=2$ **, y la gráfica de la función** $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Como la función es positiva en el intervalo considerado (0, 2), basta con calcular la integral definida:

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x^2+x+1}\right]_0^2 = \frac{-1}{2^2+2+1} - \frac{-1}{0^2+0+1} = \frac{-1}{7} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}\,u^2$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{cases}$$

a) **[1 punto] Determine para qué valores del parámetro *a* el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para *a = 1*.**

Estudiemos cuando la matriz de los coeficientes tiene determinante nulo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0+0+a^2-\left(0-3a+2a\right)=a^2+a=0 \Rightarrow a\cdot\left(a+1\right)=0$$

Para $a\neq -1$ y $a\neq 0$ la matriz de los coeficientes tiene rango 3 (máximo posible) y por tanto la matriz ampliada también tiene rango 3 e igual que el número de incógnitas del sistema. Luego el sistema es Compatible Determinado para dichos valores.
En particular para a=1 es SCD y pide resolverlo:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$ Resolvámoslo por Gauss:

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ \quad y-z=1 \\ x \quad +2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{He cambiado la ecuación 2ª por la 3ª} \\ \text{Ahora calculo Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ -x-3y-z=-5 \\ x \qquad +2z=0 \\ \hline -3y+z=-5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=5 \\ \quad y-z=1 \\ -3y+z=-5 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Ahora calculo Ecuación 3ª +3· Ecuación 2ª} \\ +3y-3z=3 \\ -3y+z=-5 \\ \hline \qquad -2z=-2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y+z=5 \\ \quad y-z=1 \\ \quad -2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y-1=1 \to y=2 \\ x+3\cdot 2+1=5 \to x=-2 \end{cases}$$

La solución del sistema cuando **a=1** es **x=–2, y=2 , z=1**

b) **[1 punto] Determine para qué valor del parámetro *a* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.**

Debe ser uno de los dos casos restantes, o bien a=0 o a=-1.

Para a = 0

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ +2z=0 \\ -z=0 \end{cases}$$ el sistema tiene matriz de coeficientes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=0$$

Determinemos un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0$ El rango de A es 2

Veamos el rango de la matriz ampliada Am

$Am=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$ Extrayendo el menor de rango 3, que se obtiene quitando la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-(0+0+0)=0$$

El rango de la matriz ampliada es 2

$\boxed{\text{Rango de A=Rango de Am < Número de incógnitas. El sistema es Compatible Indeterminado}}$

Para resolverlo:

$\begin{cases}x+3y+z=5\\ +2z=0\\ -z=0\end{cases}\Rightarrow z=0$ y sustituyendo en la 1ª ecuación $\Rightarrow x+3y=5\Rightarrow x=5-3y$

La solución o soluciones son $\begin{cases}x=5-3y\\ y=\text{ el número que quieras}\\ \text{z=0}\end{cases}$

c) [0,5 puntos] Determine para qué valor del parámetro *a* el sistema no tiene solución.

Para a = – 1

$\begin{cases}x+3y+z=5\\ -x+2z=0\\ -y-z=-1\end{cases}$ el sistema tiene matriz de coeficientes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=0$$

Determinemos un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3\neq 0$ El rango de A es 2

Veamos el rango de la matriz ampliada Am

$$Am = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$ Extrayendo el menor de rango 3, que se obtiene quitando la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6+0+0-\left(-10+0+0\right) = 4 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3

$\boxed{\text{Rango de A} \neq \text{Rango de Am. El sistema es Incompatible}}$

CUESTIÓN B.2: Considere los puntos P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0) y R = (0, 0, 1).

a) [1,25 puntos] Estudie si el triángulo PQR es o no rectángulo en el vértice P.

Para ser rectángulo en el vértice P, deben ser ortogonales los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (0,2,0)-(1,0,0) = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (0,0,1)-(1,0,0) = (-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = (-1,2,0)\cdot(-1,0,1) = 1+0+0 = 1 \neq 0$$

No es rectángulo en P

b) [1,25 puntos] Dado el punto S = (1, 2, 3), calcule el volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y S .

El volumen del tetraedro se obtiene mediante el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (1,2,3)-(1,0,0) = (0,2,3) \\ \overrightarrow{PQ} = (-1,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-1,0,1) \end{array}\right\} Volumen = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right)}{6} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0+0+0-0+6+2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\,u^3$$

CUESTIÓN B.3: El número de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función $f(x) = \dfrac{90x}{x^2+2x+9}$, donde x es el tiempo transcurrido, medido en días, desde que se inició el contagio.

a) **[0,5 puntos] ¿Cuál es el número de personas enfermas el cuarto día?**

Basta sustituir en la función x=4 →

$$f(4) = \frac{90\cdot 4}{4^2+2\cdot 4+9} = \frac{360}{16+8+9} = \frac{360}{33} = 10'909 \approx 10909 \text{ personas aproximadamente}$$

b) **[1,5 puntos] ¿Qué día se alcanza el máximo número de personas enfermas? ¿Cuál es ese número máximo?**

Derivamos

$$f'(x) = \frac{90\left(x^2+2x+9\right)-90x\left(2x+2\right)}{x^2+2x+9} = \frac{90x^2+180x+810-180x^2-180x}{x^2+2x+9} = \frac{-90x^2+810}{x^2+2x+9}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-90x^2+810}{x^2+2x+9} = 0 \Rightarrow -90x^2+810 = 0 \Rightarrow -90x^2 = -810 \Rightarrow x^2 = \frac{-810}{-90} = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Antes de -3 (por ejemplo en x=-5) →

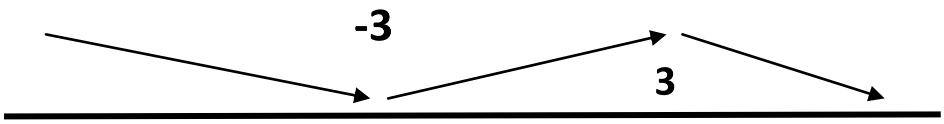
$$f'(-5)=\frac{-90\cdot(-5)^2+810}{(-5)^2+2(-5)+9}=\frac{-2250+810}{25-10+9}=\frac{-1640}{24}<0$$ → La función decrece

Entre -3 y 3 (por ejemplo x=0) → $f'(0)=\frac{-90\cdot(0)^2+810}{(0)^2+2(0)+9}=\frac{810}{9}>0$ → La función crece

Después de 3 (por ejemplo x=5) → $f'(5)=\frac{-90\cdot(5)^2+810}{(5)^2+2(5)+9}=\frac{-2250+810}{25+10+9}=\frac{-1640}{44}<0$

→ La función decrece

Resumiendo toda esta información:



Por lo tanto, en x=3 hay un máximo de personas enfermas. Siendo su número:

$$f(3)=\frac{90\cdot 3}{3^2+2\cdot 3+9}=\frac{270}{9+6+9}=\frac{270}{24}=\frac{45}{4}=11'25 \rightarrow \text{Aproximadamente 11250 personas}$$

c) **[0,5 puntos] ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta. (Indicación: calcule el límite de f (x) cuando $x\to+\infty$ y observe qué ocurre.)**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{90x}{x^2+2x+9}=0$ La tendencia es que el número de enfermos sea cero, es decir, ninguno y por tanto se erradica la enfermedad.

CUESTIÓN B.4:

a) **[1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida**

$$\int x^2e^xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2\to du=2xdx\\ dv=e^xdx\to v=e^x\end{array}\right\}=x^2\cdot e^x-\int e^x2xdx=x^2\cdot e^x-2\int xe^xdx$$

Volvamos a integrar por partes para calcular la integral $\int xe^xdx$

$$\int xe^xdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=e^xdx\to v=e^x\end{array}\right\}=x\cdot e^x-\int e^xdx=x\cdot e^x-e^x$$

Sustituyendo en la expresión inical

$$\int x^2e^xdx=x^2\cdot e^x-2\int xe^xdx=x^2\cdot e^x-2\left(x\cdot e^x-e^x\right)=\boxed{x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x+C}$$

b) **[1 punto] Obtenga una primitiva F(x) de la función $f(x)=x^2e^x$ que cumpla la condición $F(0)=1$.**

Ya hemos calculado su primitiva $F(x)=x^2\cdot e^x-2x\cdot e^x+2e^x+C$, como F(0)=1, determinemos C

$F(0)=0^2 \cdot e^0-2 \cdot 0 \cdot e^0+2e^0+C=1 \Rightarrow 0-0+2+C=1 \Rightarrow C=-1$

La primitiva pedida queda así $\boxed{F(x)=x^2 \cdot e^x-2x \cdot e^x+2e^x-1}$