



PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
158 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2016

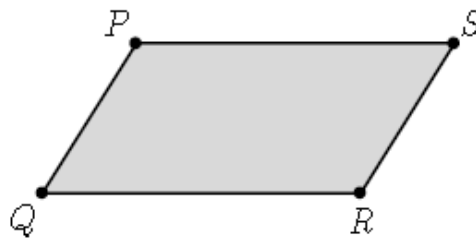
OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) [1 punto] Calcule el determinante de A.
 b) [1,5 puntos] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 , A^4 y A^5 . Calcule A^{2016} .

CUESTIÓN A.2: Los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ y $R = (1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



- a) [1,25 puntos] Calcule el área del paralelogramo.
 b) [1,25 puntos] Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{e^{1+x^2}}$$

se pide:

- a) [1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.
 b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

b) [1 punto] Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes determinantes:

a) [1 punto] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto $P = (2, 0, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2)$. Considere la recta r dada por

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

- a) [1,25 puntos] Estudie la posición relativa de π y r .
- b) [1,25 puntos] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (-1, 0, -2)$, es paralela a π y perpendicular a r .

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) [1 punto] Determine el valor de a para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

CUESTIÓN B.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$

b) [1 punto] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcule el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 \alpha + 0 + 0 - (0 + \cos^2 \alpha + 0) = -\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \boxed{-1}$$

b) [1,5 puntos] Calcule las potencias sucesivas A^2 , A^3 , A^4 y A^5 . Calcule A^{2016} .

$$A^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha & \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

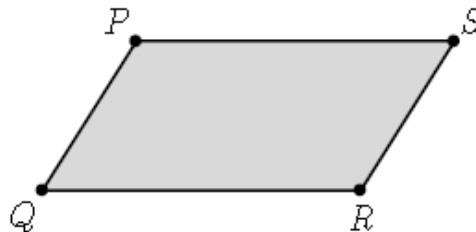
$$A^3 = A^2 \cdot A = Id \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = Id$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = Id \cdot A = A$$

Se observa que las potencias pares van a ser la matriz identidad y las impares la matriz A. Por ello $\boxed{A^{2016} = Id}$

CUESTIÓN A.2: Los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$ y $R = (1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos del siguiente paralelogramo:



a) [1,25 puntos] Calcule el área del paralelogramo.

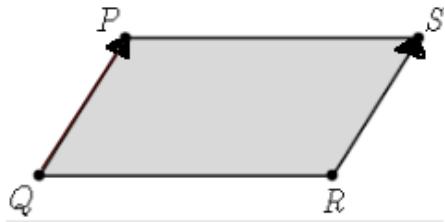
El valor del área se obtiene mediante el módulo del producto vectorial de los vectores \overrightarrow{QP} y \overrightarrow{QR} :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1) - (2, 2, 2) = (-1, -1, -1) \\ \overrightarrow{QR} = (1, 3, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

$$\text{Área} = |(0, 2, -2)| = \sqrt{0 + 4 + 4} = \boxed{\sqrt{8}}$$

b) [1,25 puntos] Determine el cuarto vértice del paralelogramo.

Consideremos el punto $S=(a, b, c)$, como los vectores \overrightarrow{QP} y \overrightarrow{RS} deben ser iguales, se cumplirá:



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= (-1, -1, -1) \\ \overrightarrow{RS} &= (a, b, c) - (1, 3, 3) = (a-1, b-3, c-3) \end{aligned} \right\} \text{Como } \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1, -1, -1) = (a-1, b-3, c-3) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -1 &= a-1 & a &= 0 \\ -1 &= b-3 & b &= 2 \\ -1 &= c-3 & c &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{S = (0, 2, 2)}$$

Algunos prefieren hacerlo por la propiedad que nos dice que el punto medio del segmento \overline{PR} y el punto medio del segmento \overline{QS} es el mismo:

$$\left. \begin{aligned} \text{Punto medio}_{PR} &= \frac{(1, 1, 1) + (1, 3, 3)}{2} = \frac{(2, 4, 4)}{2} = (1, 2, 2) \\ \text{Punto medio}_{QS} &= \frac{(2, 2, 2) + (a, b, c)}{2} = \frac{(2+a, 2+b, 2+c)}{2} = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{2+c}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(1, 2, 2) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{2+c}{2} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 1 &= \frac{2+a}{2} \rightarrow 2 = 2+a \rightarrow \boxed{a=0} \\ 2 &= \frac{2+b}{2} \rightarrow 4 = 2+b \rightarrow \boxed{b=2} \\ 2 &= \frac{2+c}{2} \rightarrow 4 = 2+c \rightarrow \boxed{c=2} \end{aligned} \right.$$

El punto $\boxed{S=(0, 2, 2)}$

CUESTIÓN A.3: Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{e^{1+x^2}}$$

se pide:

- a) [1 punto] Estudie las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

Asíntota vertical. $x=a$

Ese valor de a que buscamos se obtiene de los valores excluidos del dominio de la función, en este caso, igualamos a cero el denominador de la función \rightarrow

$$e^{1+x^2} = 0 \Rightarrow \text{No es posible, la exponencial siempre es positiva}$$

$\boxed{\text{Asíntota vertical No existe}}$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{1+x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \text{Regla de L'Hopital} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2xe^{1+x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{1+x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \text{Regla de L'Hopital} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2xe^{1+x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\boxed{\text{Asíntota horizontal } y=0}$

Asíntota oblicua $y=mx+n$

Al tener una asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua

b) [1,5 puntos] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función.

Utilizamos su función derivada $f'(x) = \frac{2e^{1+x^2} - 2x \cdot 2xe^{1+x^2}}{(e^{1+x^2})^2} = \frac{e^{1+x^2}(2-4x^2)}{(e^{1+x^2})^2} = \frac{2-4x^2}{e^{1+x^2}}$

La igualamos a cero $f'(x) = 0 \rightarrow$

$$\frac{2-4x^2}{e^{1+x^2}} = 0 \Rightarrow 2-4x^2 = 0 \Rightarrow 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Antes de $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo $x=-1$) $\rightarrow f'(-1) = \frac{2-4(-1)^2}{e^{1+(-1)^2}} = \frac{-2}{e^2} < 0 \rightarrow$ La función decrece

Entre $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo $x=0$) $\rightarrow f'(0) = \frac{2-4 \cdot 0^2}{e^{1+0^2}} = \frac{2}{e^1} > 0 \rightarrow$ La función crece

A partir de $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por ejemplo $x=1$) $\rightarrow f'(1) = \frac{2-4 \cdot 1^2}{e^{1+1^2}} = \frac{-2}{e^2} < 0 \rightarrow$ La función decrece

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, creciente en $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ y decreciente en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

Representando esta información:



Por lo anterior, la función presenta un mínimo en $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y un máximo en $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

CUESTIÓN A.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{1}{(1+e^x)^2} e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 1+e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{(t)^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} =$$

$$= \left\{ \text{Deshacemos el cambio} \right\} = \boxed{\frac{-1}{1+e^x} + C}$$

b) [1 punto] Determine el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{4}$

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+e^x} \right]_0^a = \frac{-1}{1+e^a} - \frac{-1}{1+e^0} = \frac{-1}{1+e^a} + \frac{1}{2}$$

Como debe ser igual a $\frac{1}{4} \rightarrow$

$$\frac{-1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{1+e^a} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{1+e^a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow -4 = -(1+e^a) \Rightarrow -4 = -1 - e^a \Rightarrow$$

$$-3 = -e^a \Rightarrow 3 = e^a \Rightarrow \boxed{a = \ln 3}$$

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2$, calcule razonadamente los siguientes

determinantes:

a) [1 punto]

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor comun} \\ 3 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ columna} \end{array} \right\} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco factor comun} \\ 2 \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ columna} \end{array} \right\} = 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Intercambio fila } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \right\} = 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 = \boxed{-12}$$

b) [1,5 puntos]

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Separo } 1^{\text{a}} \text{ fila en 2 determinantes} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \text{Separo } 2^{\text{a}} \text{ fila en 2 determinantes} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ saco factor comun } 3 \text{ en } 2^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ fila son proporcionales} \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, 2^{\text{a}} \text{ fila es } 3 \cdot 1^{\text{a}} \text{ fila} \\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ fila son proporcionales} \end{array} \right\} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= \left\{ \text{Intercambio fila } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \right\} = 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \text{Intercambio fila } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \right\} = 6 \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = \boxed{12}$$

CUESTIÓN B.2: Considere el plano π que pasa por el punto $P = (2, 0, 1)$ y tiene como vectores directores los vectores $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2)$. Considere la recta r dada por

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$$

a) [1,25 puntos] Estudie la posición relativa de π y r .

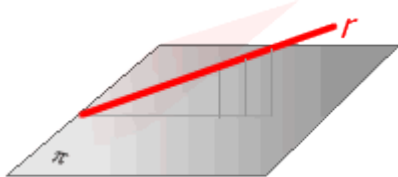
El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$.

Para que la recta sea paralela o incluida en el plano

deben ser los vectores \vec{v} , \vec{w} y \vec{v}_r dependientes, comprobemoslo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (4 + 0 - 6) = 3 \neq 0$$

Los vectores son linealmente independientes y por tanto la recta r es secante con el plano π .



Otra forma de averiguarlo. Calculemos el vector normal al plano, mediante el producto

vectorial de $\vec{v} = (1, 0, 2)$ y $\vec{w} = (0, 1, -2) \rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 1)$

Si este vector normal y el vector director de la recta son ortogonales, la recta estará en el mismo plano o será paralela a él. Comprobémoslo con el producto escalar de ambos:

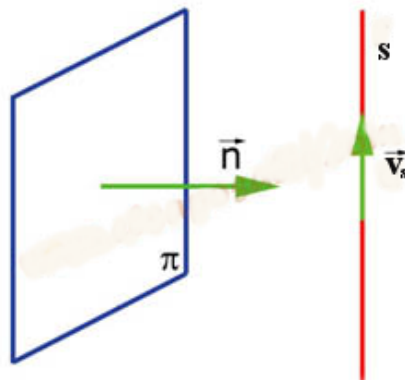
$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 3, 1) \cdot (-2, 2, 1) = -4 + 6 + 1 = 3 \neq 0$$

Por lo que la recta es secante con el plano π

b) [1,25 puntos] Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q = (-1, 0, -2)$, es paralela a π y perpendicular a r .

Solo necesito un vector director de la recta para establecer la ecuación:

$$s: \frac{x+1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z+2}{c}$$



Este vector $\vec{v}_s = (a, b, c)$ es paralelo al plano y por lo tanto perpendicular al vector normal del plano, como también es perpendicular al vector $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$, este vector que buscamos es el producto vectorial de $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ y $\vec{n} = (-2, 2, 1)$

$$\vec{v}_r \times \vec{n} = (2, 3, 1) \times (-2, 2, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1, -4, 10)$$

Así $\vec{v}_s = (1, -4, 10)$ y la ecuación de la recta pedida es:

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{10}$$

CUESTIÓN B.3: Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Empecemos con el límite en $-\infty$, como la función es definida a trozos utilizaremos la rama que esta cercana a $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a + \ln(1-x)) = a + \ln(+\infty) = a + \infty = \boxed{+\infty}$$

En el límite en $+\infty$ utilizaremos la rama de la función próxima a dicha zona y:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) = \frac{+\infty}{+\infty} = \{\text{Regla de L'Hopital}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = \frac{+\infty}{+\infty} = \{\text{Regla de L'Hopital}\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x} \right) = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

b) [1 punto] Determine el valor de a para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

Para ello basta con lograr que sea continua en $x=0$. Calculamos los límites laterales de la función en el punto $x=0$ e igualémoslos al valor de la función en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (a + \ln(1-x)) = a + \ln 1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0$$

Por lo tanto los límites laterales deben ser iguales, así $\boxed{a=0}$

CUESTIÓN B.4:

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + \arctg x + C}$$

Otra forma de resolverlo:

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Realizo la división de polinomios que aparece en la integral} \\ \begin{array}{r} x^3 \quad +x \quad +1 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -x^3 \quad -x \quad \quad \quad x \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \int x + \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x(\cancel{x^2 + 1})}{\cancel{x^2 + 1}} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + \arctg x + C}$$

b) [1 punto] Obtenga una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$ que cumpla la condición $F(0) = 2$.

$F(x)$ ya lo hemos calculado $\rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg x + C$, entonces debe cumplirse que

$$F(0) = \frac{0^2}{2} + \arctg 0 + C = 2$$

$$0 + 0 + C = 2$$

El parámetro $C=2$ y por tanto la primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctg x + 2}$