EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2017

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos A = (1, 0, 4) y B = (3, 2, 2).

a) **[0’75 puntos]** Determine la ecuación de π .

b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.

c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***..

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{4}{x-4}\right)$.

b) **[1 punto]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx-x\cos x}{x-senx}$.

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xsen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$.

b) **[0’5 puntos]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x)=xsen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un s*martphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.

a) **[0’5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.

b) **[0’5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ \ \ x - y + a^2 z = a - 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son A = (–a, 1, 1), B = (2, –1, 2) y C = (1, –2a, 3).

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en B?

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso a = –1.

CUESTIÓN B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2 + x - 6}\,dx$.

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64%, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70%. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

SOLUCIONES

Este documento es largo porque lgunos ejercicios aparecen resueltos de distintas formas. Dando la posibilidad de comprobar qué método resulta más ventajoso en cada caso.

CUESTIÓN A.1: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

Para que una matriz sea regular (o invertible) debe tener determinante no nulo. Calculemos los determinantes de A y B:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4\neq 0$$

Por lo tanto $\boxed{\text{las matrices A y B son invertibles y se puede calcular sus inversas}}$

Método 1

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj(\mathrm{B}^T)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}}{-4}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{-4}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

Método 2

También se puede calcular la inversa por ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2a & -2b\\ a+2c & b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2a=1\\ -2b=0\\ a+2c=0\\ b+2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ \frac{-1}{2}+2c=0\\ 0+2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ 2c=\frac{1}{2}\\ 2d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ b=0\\ c=\frac{1}{4}\\ d=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ b+3d=0 \\ 2a+2c=0 \\ 2b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c \\ b=-3d \\ 2(1-3c)+2c=0 \\ 2(-3d)+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c \\ b=-3d \\ 2-6c+2c=0 \\ -6d+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c \\ b=-3d \\ -4c=-2 \\ -4d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-3c \\ b=-3d \\ c=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-\frac{3}{2}=\frac{-1}{2} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=\frac{1}{2} \\ d=\frac{1}{-4} \end{cases}$$

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

Método 3

También se pueden calcular por el método de Gauss-Jordan,……

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2Fila2^a+Fila1^a} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Fila1^a/(-2)\text{ y } Fila2^a/4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2Fila1^a-Fila2^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Fila2^a/4} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Fila1^a-3\,Fila2^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}}$$

b) **[1 punto]** Determine la matriz X que cumple la ecuación AXB = C.

Método 1

$$AXB = C$$
$$A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$
$$Id \cdot X \cdot Id = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculemos la matriz X pedida:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \{\text{Multiplico las 2 matrices de la izquierda}\} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \{\text{Multiplico las matrices}\} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}}$$

<u>Método 2</u>

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se debe cumplir

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a-4b & -6a-4b \\ a+2c+2b+4d & 3a+6c+2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a-4b=0 \\ -6a-4b=2 \\ a+2c+2b+4d=-1 \\ 3a+6c+2b+4d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ 3a+2b=-1 \\ a+2c+2b+4d=-1 \\ 3a+6c+2b+4d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ -6b+2b=-1 \to -4b=-1 \to \boxed{b=1/4} \\ -2b+2c+2b+4d=-1 \to 2c+4d=-1 \\ -6b+6c+2b+4d=2 \to -4b+6c+4d=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{a=-2\cdot\frac{1}{4}=-1/2} \\ 2c+4d=-1 \\ -1+6c+4d=2 \to 6c+4d=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c+4d=-1 \\ 6c+4d=3 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación1}^{\text{a}}-\text{Ecuación2}^{\text{a}}\} = \begin{cases} 2c+4d=-1 \\ -6c-4d=-3 \end{cases}$$

$$-4c=-4 \Rightarrow \boxed{c=-4/-4=1}$$

$$2c+4d=-1 \Rightarrow 2+4d=-1 \Rightarrow 4d=-3 \Rightarrow \boxed{d=-3/4}$$

La matriz pedida es $\boxed{X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1 & -3/4 \end{pmatrix}}$

CUESTIÓN A.2: Considere el plano π que pasa por el punto P = (1, 2, 3) y tiene como vectores directores a $\vec{u}=(1,-1,0)$ y $\vec{v}=(1,0,2)$. Considere la recta ***r*** que pasa por los puntos A = (1, 0, 4) y B = (3, 2, 2).

a) **[0'75 puntos]** Determine la ecuación de π.

La ecuación del plano se puede obtener de distintas maneras:

<u>Método 1:</u>

Resolviendo el determinante $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2x+2)+0+0-((-z+3)+(2y-4)+0) = -2x+2+z-3-2y+4 =$$

$$= -2x-2y+z+3$$

La ecuación del plano es $\boxed{\pi:\quad -2x-2y+z+3=0}$

Método 2:

La ecuación en paramétricas del plano es $\pi: \begin{cases} x = 1+\lambda\cdot 1+\gamma\cdot 1 \\ y = 2-\lambda\cdot 1+\gamma\cdot 0 \\ z = 3+\lambda\cdot 0+\gamma\cdot 2 \end{cases}$

El plano tiene ecuación $\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1+\lambda+\gamma \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+2\gamma \end{cases}}$

Método 3:

Determino el vector normal al plano que resulta del producto vectorial de los vectores directores:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i+0+0-(-k+2j+0) = -2i-2j+k \Rightarrow \vec{n} = (-2,-2,1)$$

El plano tiene ecuación $\pi:\quad -2x-2y+z+D=0$

Determinemos el valor de D para que pase por el punto P(1, 2, 3). Para ello sustituimos x, y, z de la ecuación del plano por las coordenadas del punto

$$-2\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0 \Rightarrow -2-4+3+D=0$$

$$-3+D=0 \Rightarrow D=3$$

El plano tiene ecuación $\boxed{\pi:\quad -2x-2y+z+3=0}$

b) **[0,75 puntos]** Determine la ecuación de ***r***.

Para obtener la ecuación de la recta ***r*** que pasa por los puntos A = (1, 0, 4) y B = (3, 2, 2) necesitamos conocer las componentes del vector director:

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B-A = A = (3, 2, 2)-(1, 0, 4) = (2, 2, -2)$$

Como son todas las componentes del vector proporcionales nos sirve como vector director el que se obtiene dividiendo todas las componentes entre 2 → $\vec{v_r} = (1,1,-1)$

En paramétricas sería:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 0+\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}}$$

O bien

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

c) **[1 punto]** Estudie la posición relativa de π y ***r***.

Se puede hacer de varias formas, damos dos.

Método 1:

Comparemos las componentes de los vectores directores del plano π y el vector director de la recta ***r***:

$\vec{u} = (1, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 2)$ $\vec{v_r} = (1, 1, -1)$

Con ellos formamos una matriz de la cual calculamos su determinante y decidiremos si son coplanarios o no.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - (0 + 1 + 2) = -5 \neq 0$$

Al ser no nulo significa que no son coplanarios los vectores y por tanto, la recta corta al plano en un punto. $\boxed{\Pi \text{ y r son secantes}}$

Método 2:

Sustituyamos las coordenadas de los puntos de la recta en el plano y comprobemos si existe un único punto de corte (serian secantes), infinitos puntos de corte (la recta está en el plano) o no tiene solución (la recta es paralela al plano)

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi: \; -2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$-2(1+\lambda) - 2(\lambda) + (4 - \lambda) + 3 = 0$$

$$-2 - 2\lambda - 2\lambda + 4 - \lambda + 3 = 0$$

$$5 - 5\lambda = 0$$

$$-5\lambda = -5$$

$$\lambda = 1$$

$\boxed{\text{El punto de corte de punto y plano es único y por tanto son secantes.}}$

Dicho punto de corte es $\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 4 - 1 = 3 \end{cases}$ → P(2, 1, 3)

Método 3:

Mediante el producto escalar del vector normal al plano y el vector director de la recta. Si dicho producto es 0 recta y plano o son paralelos o la recta está en el plano. Si es distinto de cero la recta corta al plano en un punto. En este caso:

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = A = (3, 2, 2) - (1, 0, 4) = (2, 2, -2)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 0 + 0 - (-k + 2j + 0) = -2i - 2j + k \Rightarrow \vec{n} = (-2, -2, 1)$$

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (2, 2, -2) \cdot (-2, -2, 1) = -4 - 4 - 2 = -10 \neq 0$$

$\boxed{\text{El plano } \pi \text{ y la recta r son secantes}}$

CUESTIÓN A.3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 punto]** $\lim_{x \to 4} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} - 2} - \dfrac{4}{x - 4} \right)$.

Método 1:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación }\left\{\text{Racionalizamos la primera fracción}\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}-\frac{4}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}=\left\{\text{Regla de L'Hôpital}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot 2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Método 2:

$$\lim_{x\to 4}\left(\ \right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación }\left\{\text{Factorizamos } x-4\right\}=$$

$$x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2-4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{\left(\cancel{\sqrt{x}-2}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)=\frac{1}{2+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Método 3:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\text{Indeterminación }\left\{\text{Sumamos las fracciones}\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}=\frac{x-4-4\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-4\right)}=\frac{x-4-4\sqrt{x}+8}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-4\right)}=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x-4\right)}=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2x+8}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-4\sqrt{x}-2x+8}\right)=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación }\left\{\text{Aplicamos L'Hòptital}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1-4\frac{1}{2\sqrt{x}}+0}{\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}-4\frac{1}{2\sqrt{x}}-2+0}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1-\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}-2}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{2x+x-4-4\sqrt{x}}{2\cancel{\sqrt{x}}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{2x+x-4-4\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\sqrt{x}-4}{3x-4-4\sqrt{x}}\right)=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación }\left\{\text{Aplicamos L'Hòptital}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3-4\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{3-\frac{2}{\sqrt{x}}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{3-\frac{2}{\sqrt{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{3-1}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

b) **[1 punto]** $\lim_{x\to 0}\frac{senx - x\cos x}{x - senx}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx - x\cos x}{x - senx} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} = \{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - (\cos x + x(-senx))}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + xsenx}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{1-\cos x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{senx + x\cos x}{senx} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación} =$$

$$= \{\text{Aplico regla de L'Hôpital}\} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + (\cos x + x(-senx))}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - xsenx}{\cos x} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

CUESTIÓN A.4:

a) **[1,5 puntos]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$.

$$\int xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes} \\ \left.\begin{array}{l}\text{u=x} \\ \text{dv=}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}du = dx \\ v = \int sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\end{array}\right. \\ \qquad\qquad \int udv = u\cdot v - \int vdu\end{array}\right\} =$$

$$= x\cdot\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) - \int -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\int\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \boxed{-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) + C}$$

La dificultad de este ejercicio radica en que te sea fácil o no el cálculo de las integrales:

$$\int sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

y

$$\int \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Para su cálculo puedes hacer un cambio de variable $\frac{\pi x}{2} = t$ o aprenderte que al ser

$\int senxdx = -\cos x$ y tambien $\int \cos xdx = senx$ y la derivada de $\frac{\pi x}{2}$ es $\frac{\pi}{2}$ se debe ajustar con la inversa de $\frac{\pi}{2}$ que es $\frac{2}{\pi}$

b) **[0'5 puntos]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=0$ y $x=1$, y la gráfica de la función $f(x) = xsen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Comprobemos si la función corta al eje X en algún punto comprendido entre 0 y 1.

$$f(x)=0 \to x sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \to \begin{cases} \frac{\pi x}{2}=0 \to x=0 \\ \frac{\pi x}{2}=\pi \to x=2 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X de la función son para x=0, x=2,….
Ninguno está en el intervalo (0, 1)

Además la función es positiva $f(x)>0$ ya que $x sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)>0$ entre 0 y 2

Así el área pedida es la integral definida:

$$\int_0^1 x sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\left[-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 0}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)\right)-\left(-\frac{2\cdot 1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}\right)\right)=$$

$$=(0+0)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{4}{\pi^2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=-\left(-\frac{2}{\pi}\cdot 0+\frac{4}{\pi^2}\cdot 1\right)=\boxed{\frac{4}{\pi^2}\ u^2}=\boxed{0'405\,u^2}$$

CUESTIÓN A.5: Según un estudio reciente, el 68% de los encuestados poseen un s*martphone*, el 38% tienen una *tablet* y el 16% disponen de ambos dispositivos.

Método 1

Construyamos la tabla de contingencia asociada con esta situación planteada, indicando en negrita los datos proporcionados y en rojo lo obtenido a partir de ellos.

	Tablet	No tablet	
Smartphone	**16**	**52**	**68**
No smartphone	**22**	**10**	**32**
	38	**62**	**100**

a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos.
A partir de lo que aparece en la tabla, esta probabilidad es del $\boxed{10\%}$, aparece en la celda donde se cruzan la fila de "No Smartphone" y la columna de "No Tablet".

b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?
A partir de los datos que aparecen en la tabla superior:

$$Probabilidad\ de\ que\ tenga\ Tablet\ sabiendo\ que\ tiene\ Smartphone=$$

$$=P(Tablet/Smartphone)=\frac{16}{68}=0'235=\boxed{23'5\%}$$

Método 2

Llamemos S=Tener Smartphone, T=Tener Tablet. Siendo P(S)=0'68 y P(T)=0'38

Así $\overline{S}$ =No tener Smartphone y $\overline{T}$ =No tener Tablet. Siendo P($\overline{S}$)=1-0'68=0'32 y P($\overline{T}$)=1-0'38=0'62

Por las leyes de Morgan:

a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos

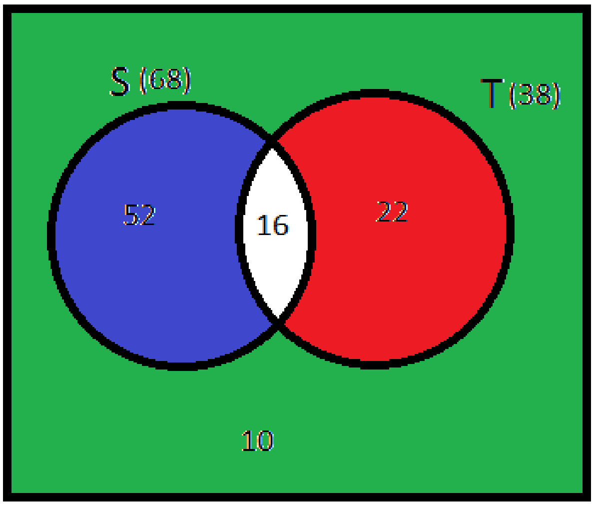
$$P\left(\overline{S \cup T}\right) = 1 - P\left(S \cup T\right) = 1 - \left(P(S) + P(T) - P(S \cap T)\right) = 1 - \left(0'68 + 0'38 - 0'16\right) = 1 - 0'9 = \boxed{0'1}$$

b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

$$P\left(T / S\right) = \frac{P\left(T \cap S\right)}{P(S)} = \frac{0'16}{0'68} = \boxed{0'235}$$

<u>Método 3</u>

Mediante un diagrama de Venn, llamando S a los que tienen Smartphone (azul y blanco), separando a los que solo tienen Smartphone (azul) de los que tienen Smartphone y Tablet (blanco) y llamando T a los que tienen Tablet (rojo y blanco) separando a los que tienen solo Tablet (rojo) de los que tienen tablet y Smartphone (blanco). El color verde es para los que no tienen ni Tablet ni Smartphone, completando un total de 100% de personas,



a) **[0'5 puntos]** Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no disponga de ninguno de los dos dispositivos

P(No tenga ningún dispositivo)= $\frac{10}{100} = \boxed{0'1}$

b) **[0'5 puntos]** Resulta que la persona elegida posee un *smartphone*, ¿qué probabilidad hay de que tenga una *tablet*?

P(Tenga una Tablet sabiendo que tiene un Smartphone)=Solo puedo tener en cuenta a los 68 que tienen smartphone y de entre ellos los que tienen Tablet= $\frac{16}{68} = \boxed{0'235}$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x-y+a^2z=a-1 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Determine para qué valores del parámetro ***a*** el sistema tiene solución única. No hay que resolverlo.

Para cualquier valor de a ≠ 1 y a ≠ –1

Existen varias formas de resolverlo.

<u>Método 1</u>

Con el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x-y+a^2z=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2^a \text{ ecuación - } 1^a \text{ ecuación} \to 2^a \text{ ecuación} \\ \quad 2x+3y+2z=0 \\ -\ \ 2x+y+2z=0 \\ \hline 0+2y+0=0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2\cdot 3^a \text{ ecuación - } 1^a \text{ Ecuación} \to 3^a \text{ ecuación} \\ \quad 2x-2y+2a^2z=2a-2 \\ -\ \ 2x+y+2z \quad =0 \\ \hline 0-3y+\left(2a^2-2\right)z=2a-2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2y=0 \\ -3y+\left(2a^2-2\right)z=2a-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ y=0 \\ \left(2a^2-2\right)z=2a-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+\ y+2z \quad =0 \\ \quad y \quad =0 \\ \quad \left(2a^2-2\right)z=2a-2 \end{cases}$$

Nos planteamos distintas situaciones cuando $2a^2-2=0 \Rightarrow 2\left(a^2-1\right)=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$

Primer caso. a = 1

$$\begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2^a \text{ ecuación - } 1^a \text{ ecuación} \to 2^a \text{ ecuación} \\ \quad 2x+3y+2z=0 \\ -\ \ 2x+y+2z=0 \\ \hline 2y \quad =0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2\cdot 3^a \text{ ecuación - } 1^a \text{ Ecuación} \to 3^a \text{ ecuación} \\ \quad 2x-2y+2z=0 \\ -\ \ 2x+y+2z \ =0 \\ \hline -3y \quad =0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2y=0 \\ -3y=0 \end{cases}$$

La segunda ecuación y la primera son iguales. El sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones)

Segundo caso. a = –1

$$\begin{cases} 2x+\ \ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ \ x-y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ ecuación - } 1^{\text{a}} \text{ ecuación} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \quad 2x+3y+2z=0 \\ \underline{-\ \ 2x+y+2z=0} \\ \qquad\quad 2y \qquad =0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\cdot 3^{\text{a}} \text{ ecuación - } 1^{\text{a}} \text{ Ecuación} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \quad 2x-2y+2z=-4 \\ \underline{-\ \ 2x+y+2z\ =0} \\ \qquad -3y \qquad =-4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y+2z=0 \\ 2y=0 \\ \ -3y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y+2z=0 \\ y=0 \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Salen dos valores distintos para la incognita "y". El sistema es incompatible (No tiene solución)

Tercer caso. a≠1, a≠–1

$$\begin{cases} 2x+\ \ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ \ x-y+a^2z=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y+2z \qquad =0 \\ \qquad y \qquad\qquad =0 \\ \qquad \left(2a^2-2\right)z=2a-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y+2z \qquad =0 \\ \qquad y \qquad\qquad =0 \\ \qquad z=\dfrac{2a-2}{2a^2-2} \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y la solución única se obtendría a partir de lo anterior

Método 2

Con los rangos de las matrices asociadas al sistema

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix} \text{ y } Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a^2 & a-1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{vmatrix}=6a^2+2-4-\left(6+2a^2-4\right)=6a^2+2-4-6-2a^2+4=4a^2-4=0$$

$$4a^2-4=0 \Rightarrow 4a^2=4 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Primer caso. a = 1

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango = 2 ya que el siguiente menor de orden 2 es no nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$$

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ tiene rango =2 ya que la última columna es todo ceros.

Rango A = rango Am = 2 < nº incógnitas

El sistema tiene infinitas soluciones (Sistema Compatible Indeterminado)

Segundo caso. a = –1

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango = 2 ya que el siguiente menor de orden 2 es no nulo

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-2=4 \neq 0$

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ tiene rango = 3 ya que el menor de orden 3 siguiente es no nulo

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12-6+0+0-(0-4-2+0) = -12 \neq 0$

Rango A ≠ rango Am

$\boxed{\text{El sistema no tiene solución (Sistema Incompatible)}}$

Tercer caso. a≠1, a≠–1

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 ya que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2-4 \neq 0$ al ser a ≠ 1 y a ≠ –1

y $Am=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a^2 & a-1 \end{array}\right)$ tiene también rango =3

Rango A = rango Am = 3 = nº incógnitas

$\boxed{\text{El sistema tiene una única solución (Sistema Compatible Determinado)}}$

b) **[1,25 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

Es para a = 1 y el sistema queda asi

$\begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$ Lo resolvemos por el método de Gauss

$$\begin{cases} 2x+\ y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Realicemos las operaciones con las ecuaciones necesarias para triangular el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2^{a}\text{ ecuación - }1^{a}\text{ ecuación}\to 2^{a}\text{ ecuación} \\ \quad 2x+3y+2z=0 \\ \underline{\;-2x-y-2z=0\;} \\ \qquad\quad 2y \qquad =0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot 3^{a}\text{ ecuación - }1^{a}\text{ Ecuación}\to 3^{a}\text{ ecuación} \\ \quad 2x-2y+2z=0 \\ \underline{\;-2x-y-2z\;=0\;} \\ \qquad -3y \qquad =0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2x+\;\;y+2z=0 \\ 2y=0 \\ \;\;-3y=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x+\;\;y+2z=0 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow 2x+2z=0\Rightarrow x+z=0\Rightarrow x=-z$$

$$\boxed{\text{La solución es }\begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}}$$

c) **[0,5 puntos]** Determine para qué valor del parámetro ***a*** el sistema no tiene solución.

$\boxed{\text{Para a=–1}}$

CUESTIÓN B.2: Los vértices del triángulo ABC son A = (–a, 1, 1), B = (2, –1, 2) y C = (1, –2a, 3).

a) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto ha de valer *a* para el triángulo sea rectángulo en B?

Consideremos los vectores

$\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}=A-B=(-a,1,1)-(2,-1,2)=(-a-2,\,2,\,-1)$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(1,-2\text{a},3)-(2,-1,2)=(-1,\,-2a+1,1)$

Para que sea rectángulo en B deben de ser ortogonales los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y por tanto su producto escalar debe ser nulo

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-a-2,\,2,\,-1)\cdot(-1,\,-2a+1,1)=a+2-4a+2-1=-3a+3$

Para que sean ortogonales debe ser 0 este producto escalar

Es decir $-3a+3=0\rightarrow -3a=-3\rightarrow a=1$

$\boxed{\text{La solución es } \mathbf{a = 1}}$

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo ABC para el caso a = –1.

Para a = –1 los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ que delimitan el triángulo quedan

$\overrightarrow{BA}=(-a-2,\,2,\,-1)=(-1,2,-1)$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\,-2a+1,1)=(-1,3,1)$

El área del triángulo ABC es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ dividido por 2

$$\text{Área triángulo } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}}{2}=$$

$$=\frac{|2i+j-3k-(-2k-j-3i)|}{2}=\frac{|2i+j-3k+2k+j+3i|}{2}=\frac{|5i+2j-k|}{2}=\frac{|(5,\,2,\,-1)|}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{25+4+1}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{2}=\boxed{2'73\,u^2}$$

CUESTIÓN B.3: [2 puntos] La producción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones), donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamiento (en millones de euros). La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+ K?

La función a minimizar es la función coste L+ K.

Se deben producir 8 millones de unidades, es decir, P = 8, siendo $P=2LK^2$

Por lo tanto $8=2LK^2 \Rightarrow 4=LK^2 \Rightarrow L=\frac{4}{K^2}$

La función coste que depende de K quedaría:

$$f(K)=L+K=\frac{4}{K^2}+K$$

Esta es la función a minimizar.

Calculamos la derivada primera de $f(\mathrm{K})=\frac{4}{K^2}+K$

$$f'(\mathrm{K})=\left(\frac{4}{K^2}+K\right)'=\left(4\cdot\mathrm{K}^{-2}+K\right)'=-8K^{-3}+1=\frac{-8}{K^3}+1$$

Igualando a cero la $f'(\mathrm{K})$:

$$f'(\mathrm{K})=0\Rightarrow\frac{-8}{K^3}+1=0\Rightarrow\frac{-8}{K^3}=-1\Rightarrow\frac{8}{K^3}=1\Rightarrow 8=K^3\Rightarrow K=\sqrt[3]{8}=2$$

El posible mínimo seria para K = 2 millones de euros de gasto en equipamiento
Lo comprobamos con la segunda derivada

$$f'(\mathrm{K})=-8K^{-3}+1\Rightarrow f''(\mathrm{K})=24K^{-4}=\frac{24}{K^4}$$

Como $f''(2)=\frac{24}{2^4}=\frac{24}{16}=1'5>0$ la función presenta un mínimo en K = 2

Para el valor de K = 2 se consigue un mínimo coste

$$K=2\Rightarrow L=\frac{4}{2^2}=1$$

$\boxed{\text{Los valores para los que se minimiza el coste son K = 2 millones de euros y L = 1 millón de euros}}$

CUESTIÓN B.4: [2 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{x^2+x-6}dx$.

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}dx = \{\text{Es una integral por descomposición en fracciones simples}\} =$$

Averiguemos las raices del denominador:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases} x=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x=\frac{-1-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A\cdot(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$x=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)$$

Dando a x el valor -3 queda $-3=A\cdot(-3+3)+B\cdot(-3-2) \Rightarrow -3=-5B \Rightarrow B=\frac{3}{5}$

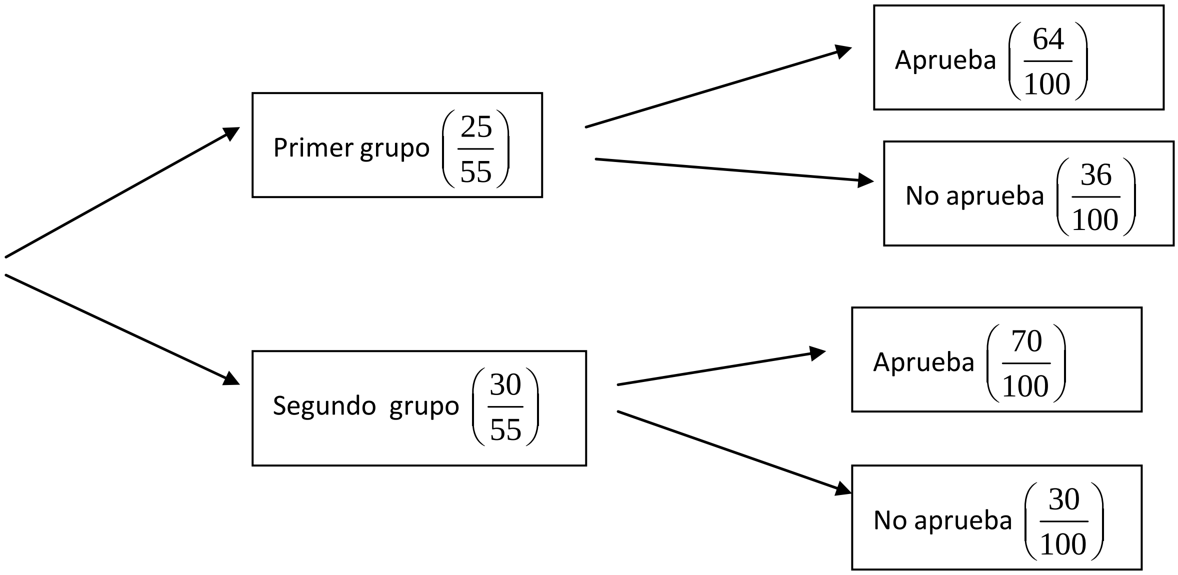
Dando a x el valor 2 queda $2=A\cdot(2+3)+B\cdot(2-2) \Rightarrow 2=5A \Rightarrow A=\frac{2}{5}$

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}dx=\int\frac{2/5}{x-2}dx+\int\frac{3/5}{x+3}dx=\frac{2}{5}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{5}\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{3}{5}\ln|x+3|+C}$$

CUESTIÓN B.5: [1 punto] Dos aulas de 2º de Bachillerato hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. En el primer grupo hay 25 alumnos de los cuales aprueba el 64%, mientras que en el segundo grupo, de 30 alumnos, lo hace el 70%. De entre todos los exámenes se elige uno al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno del primer grupo?

Método 1

En total hay 30+25=55 alumnos entre los cuales se elige uno al azar. Realicemos el árbol que describa la elección del alumno, primero si es del primer o segundo grupo y después si aprueba o no. Este árbol nos debe ayudar a entender mejor el ejercicio y responder con facilidad a la pregunta planteada:



La probabilidad de que un alumno sea del primer grupo, sabiendo que ha aprobado sería:

P(Aprueba)=$\frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100}+\frac{30}{55}\cdot\frac{70}{100}$=0'67

$$P(\text{Primer grupo / Aprueba})=\frac{\frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100}}{\frac{25}{55}\cdot\frac{64}{100}+\frac{30}{55}\cdot\frac{70}{100}}=\frac{25\cdot 64}{25\cdot 64+30\cdot 70}=\frac{1600}{3700}=\frac{16}{37}=\boxed{0'43}$$

Método 2

Hay un total de 25 + 30 =55 alumnos de los cuales aprueban:

- 64% de 25 en el primer grupo, es decir, $\frac{64\cdot 25}{100}=16$ alumnos
- 70% de 30 en el segundo grupo, es decir, $\frac{70\cdot 30}{100}=21$ alumnos

En total aprueban 16 + 21 = 37 alumnos

Hagamos una tabla:

	Aprueba	No aprueba	
Primer grupo	**16**	**9**	**25**
Segundo grupo	**21**	**9**	**30**
	37	**18**	**55**

La probabilidad de que un alumno elegido al azar sea del primer grupo sabiendo que ha aprobado sería:

$$P(\text{Primer grupo / Aprueba})=\frac{16}{37}=\boxed{0'43}$$