



PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

- [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.
- [1,5 p.] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

- [1 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})$.
- [1 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}$.

CUESTIÓN A.3:

- [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} dx$
- [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x e^{\cos x}$.

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad r: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

- [1,25 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.
- [1,25 p.] Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

- Elegido un estudiante al azar, se pide:
 - [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?
 - [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?
- [0,5 p.] Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,25 p.] Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0, 0, 0)$.
- b) [1,25 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x) = x\sqrt{18-x^2}$ con $-4 < x < 4$.

- a) [1 p.] Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.
- b) [1 p.] Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

CUESTIÓN B.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$

- b) [0,5 p.] Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P = (1, 1, 3)$ y $Q = (1, 5, 0)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

- a) [0,5 p.] Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.
- b) [1,25 p.] Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).
- c) [0,75 p.] Calcule el área de dicho triángulo PQR .

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

- a) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
- b) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
- c) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

- a) [1 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.
 b) [1,5 p.] Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A .

a) Para que sea regular una matriz debe tener determinante no nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \text{ La matriz } A \text{ es regular.}$$

• **Método 1 (Fórmula)**

Para calcular su inversa aplicamos la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^T) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{1} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

• **Método 2 (Sistema)**

Otra forma de hallar la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ cumpliendo:}$$

$$A \cdot A^{-1} = Id$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2a + c & -2b + d \\ 3a - 2c & 3b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -2a + c = 1 \\ -2b + d = 0 \\ 3a - 2c = 0 \\ 3b - 2d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} -2a + c = 1 \\ 3a - 2c = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4a + 2c = 2 \\ 3a - 2c = 0 \end{array} \\ -a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2} \Rightarrow -6 - 2c = 0 \Rightarrow -2c = 6 \Rightarrow \boxed{c = -3} \\ \begin{array}{l} -2b + d = 0 \\ 3b - 2d = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4b + 2d = 0 \\ 3b - 2d = 1 \end{array} \\ -b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow -3 - 2d = 1 \Rightarrow -2d = 4 \Rightarrow \boxed{d = -2} \end{array} \right.$$

La matriz inversa es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) Despejando en la ecuación matricial:

$$AX = A + A^T \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A + A^T) \Rightarrow X = A^{-1}(A + A^T)$$

Calculemos la expresión:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(A + A^T) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 & -8+4 \\ 12-8 & -12+8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) [1 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})$.

b) [1 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x}$.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}) &= \infty - \infty = \text{Indeterminación (Conjugado)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2})}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2})^2 - (\sqrt{x^2 - 2})^2}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - (x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} + 2 - x^{\cancel{2}} + 2}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \frac{4}{+\infty} = \boxed{0} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} &= \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{0+1}{1+0} = \boxed{1} \end{aligned}$$

CUESTIÓN A.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \operatorname{sen} x e^{\cos x} dx$

b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x e^{\cos x}$.

a)

$$\int \cancel{\text{sen}x} e^{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos con cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -\cancel{\text{sen}x} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-\cancel{\text{sen}x}} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \cancel{\text{sen}x} e^t \frac{dt}{-\cancel{\text{sen}x}} = -\int e^t dt = -e^t =$$

$$= \{ \text{Deshaciendo el cambio de variable} \} = \boxed{-e^{\cos x} + K}$$

- b) El área del recinto se calcula con una integral definida, necesitando calcular los límites de integración. Estos límites son los indicados por las rectas verticales (0 y $\pi/2$) siempre que la función no cruce el eje OX. Comprobémoslo igualando la función a 0:

$$\text{sen}x e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0 + 2\pi k; x = \pi + 2\pi k \\ e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{Imposible} \end{cases}$$

No existe ningún valor ya que solo es entre 0 y $\pi/2$

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi/2} \text{sen}x e^{\cos x} dx \right| = \left| \left[-e^{\cos x} \right]_0^{\pi/2} \right| = \left| \left(-e^{\cos \pi/2} \right) - \left(-e^{\cos 0} \right) \right| = |-1 + e|$$

$$\text{Área} = \boxed{1'71 u^2}$$

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \quad \text{y } s: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

- a) [1,25 p.] Compruebe que ambas rectas son paralelas.
 b) [1,25 p.] Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

- a) Averiguemos el vector director de cada una de las rectas y veamos si son proporcionales, en cuyo caso serán paralelas o coincidentes.

El vector director de la recta r se determina con el producto vectorial de los vectores normales a cada plano:

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5i + 3j + 6k - (-k + 10j + 9i)$$

$$\vec{v}_r = -14i - 7j + 7k = (-14, -7, 7)$$

y el vector director de la recta s aparece en la expresión de su ecuación $s: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$

$$\vec{v}_s = (2, 1, -1)$$

Se observa que $\frac{-14}{2} = \frac{-7}{1} = \frac{7}{-1}$. Podrían ser paralelas o coincidentes. Pero el punto $P_s(5, 0, 0)$

que pertenece a la recta s no pertenece a la recta r :

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 - 0 + 0 = 3 \\ 5 + 0 + 0 = 1 \end{cases} \text{ No es cierta ninguna de las dos igualdades}$$

Las rectas r y s son paralelas

b) Necesitamos dos vectores directores del plano y un punto. Tenemos un vector (el director de cualquiera de las dos rectas) y un punto (el de la recta s). Obtengamos un punto de r, dando a $z=0$, resolvemos el sistema de ecuaciones que nos queda para hallar las otras dos coordenadas del punto buscado

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 - 3y \Rightarrow 2(1 - 3y) - y = 3 \Rightarrow 2 - 6y - y = 3$$

$$-7y = 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{7}$$

$$x = 1 - 3 \cdot \frac{-1}{7} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\text{El punto es } P_r \left(\frac{10}{7}, \frac{-1}{7}, 0 \right)$$

Tenemos $P_s(5, 0, 0)$ y $P_r \left(\frac{10}{7}, \frac{-1}{7}, 0 \right)$, con lo que formamos otro vector director del plano:

$$\vec{u}_\pi = P_r \left(\frac{10}{7}, \frac{-1}{7}, 0 \right) - P_s(5, 0, 0) = \left(\frac{-25}{7}, \frac{-1}{7}, 0 \right)$$

El plano que pasa por $P_s(5, 0, 0)$ y tiene como vectores directores $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$ y $\vec{u}_\pi = \left(\frac{-25}{7}, \frac{-1}{7}, 0 \right)$

tiene las ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= 5 + 2\lambda - \frac{25}{7}\alpha \\ y &= 0 + \lambda - \frac{1}{7}\alpha \\ z &= 0 - \lambda \end{aligned} \right\}$$

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) [0,5 p.] Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10		
Chicas			25
	30		40

De estos datos completamos el resto de datos:

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10	5	15
Chicas	20	5	25
	30	10	40

a.1) Probabilidad de no aprobar las matemáticas = $\frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$

a.2) Probabilidad de que sea chica y apruebe las matemáticas = $\frac{20}{40} = 0,5 = 50\%$

b)

Probabilidad de que sea chica condicionado a que ha aprobado las matemáticas =

$$= \frac{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas y sea chica}}{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas}} = \frac{20}{30} = 0,66 = 66\%$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro a :

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,25 p.] Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0, 0, 0)$.
 b) [1,25 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

a) Estudiemos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{pmatrix} \text{ Su determinante es}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a + a(a-1) - (2a + a + a^2(a-1)) =$$

$$= a^2 + 2a + a^2 - a - 2a - a - a^3 + a^2 = -a^3 + 3a^2 - 2a$$

Igualándolo a cero:

$$-a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a^2 + 3a - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} x = \frac{-3+1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ x = \frac{-3-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{cases} \end{cases}$$

El sistema tiene una única solución $(0,0,0)$ **cuando a es distinto de 0, 1 y 2.**

b) Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Sustituyendo el valor en el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene la primera y la tercera ecuación iguales, luego es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Dejemos z como parámetro y resolvámoslo:

$$\begin{cases} 2x + y = -2z \\ x + y = -2z \end{cases} \Rightarrow x = -2z - y \text{ (sustituimos en la 1ª ecuación)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-2z - y) + y = -2z \Rightarrow -4z - 2y + y = -2z \Rightarrow -y = 2z \Rightarrow y = -2z$$

$$\text{Volviendo atrás y sustituyendo: } x = -2z - (-2z) = 0$$

La solución es $x = 0; y = -2z; z = z$

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x) = x\sqrt{18-x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) [1 p.] Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) [1 p.] Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

a)

$$f(x) = x\sqrt{18-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \sqrt{18-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{18-x^2}} \cdot (-2x) =$$

$$f'(x) = \sqrt{18-x^2} + \frac{-2x^2}{2\sqrt{18-x^2}} = \boxed{\sqrt{18-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

Podemos simplificar un poco:

$$f'(x) = \sqrt{18-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}} = \frac{(\sqrt{18-x^2})^2 - x^2}{\sqrt{18-x^2}} = \frac{18-x^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}} = \boxed{\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

b) Si igualamos a cero la derivada:

$$\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}} = 0 \Rightarrow 18-2x^2 = 0 \Rightarrow 18 = 2x^2 \Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Estos dos posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión están dentro del dominio de la función $(-4, 4)$, pero comprobemos como cambia el signo de la derivada primera para ver cual de estas tres posibilidades corresponde a cada uno de los dos valores.

$$\text{Tomemos un valor menor que } -3, \text{ por ejemplo } -4 \rightarrow f'(-4) = \frac{18-2 \cdot 16}{\sqrt{18-16}} = \frac{-14}{\sqrt{2}} < 0$$

$$\text{Tomemos un valor entre } -3 \text{ y } 3, \text{ por ejemplo } 0 \rightarrow f'(0) = \frac{18-2 \cdot 0}{\sqrt{18-0}} = \frac{18}{\sqrt{18}} > 0$$

$$\text{Tomemos un valor mayor que } 3, \text{ por ejemplo } 4 \rightarrow f'(4) = \frac{18-2 \cdot 16}{\sqrt{18-16}} = \frac{-14}{\sqrt{2}} < 0$$

Luego $x = -4$ es un mínimo y $x = 4$ es un máximo.

CUESTIÓN B.3:

a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$

b) [0,5 p.] Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

a) Utilicemos el método de integración por partes:

$$\int x \ln x \, dx = \int u \, dv = \left. \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \, dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{cases} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v \, du = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K}$$

b) La primitiva de $f(x) = x \ln x$ es $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$, para averiguar el valor de K para que pase por $(1, 0)$ basta sustituir $F(1)=0$:

$$F(1) = \frac{1^2 \cdot \ln(1)}{2} - \frac{1^2}{4} + K = 0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{4} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P = (1, 1, 3)$ y $Q = (1, 5, 0)$, y la recta r dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

- [0,5 p.]** Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.
- [1,25 p.]** Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).
- [0,75 p.]** Calcule el área de dicho triángulo PQR .

a) Para que el punto P esté en la recta debe cumplir las dos ecuaciones al sustituir en ella sus coordenadas:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 - 2 \cdot 3 = -3 \\ -1 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 = -3 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

No es cierta ninguna de las igualdades, el punto P no pertenece a la recta r .

Hacemos lo mismo con el punto Q

$$P(1,5,0) \quad r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 5 - 2 \cdot 0 = -3 \\ -1 + 5 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -3 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Ahora si son ciertas las dos igualdades, el punto **Q** si pertenece a la recta **r**.

- b) Debemos encontrar un punto R de la recta **r** tal que el producto escalar de los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} sea cero.

Hallemos otro punto S cualquiera de la recta **r** y así determinaremos vector director $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{QS}$.

También podemos hallar el vector director de la recta con el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que la definen.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 2k - (k - 2i) = 2i + 2j + k = (2, 2, 1)$$

En la ecuación de la recta $r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$

Demos el valor $x = 0$ y en la segunda ecuación obtendremos $y = 4$. Sustituyendo en la primera ecuación: $0 - 4 - 2z = -3 \Rightarrow -2z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

El punto $S(0, 4, -1/2)$

$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{QS} = S - Q = (0, 4, -1/2) - (1, 5, 0) = (-1, -1, -0.5)$ que multiplicándolo por -2 nos queda el vector director de la recta $\overrightarrow{u_r} = (2, 2, 1)$

Así cualquier punto de la recta **r** sigue las ecuaciones paramétricas:

$$\overrightarrow{u_r} = (2, 2, 1) \quad Q(1, 5, 0) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$$

El punto R pedido tiene las coordenadas $(1 + 2\lambda, 5 + 2\lambda, \lambda)$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 5, 0) - (1, 1, 3) = (0, 4, -3)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (1 + 2\lambda, 5 + 2\lambda, \lambda) - (1, 1, 3) = (2\lambda, 4 + 2\lambda, \lambda - 3)$$

Y el producto escalar de ambos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (0, 4, -3) \cdot (2\lambda, 4 + 2\lambda, \lambda - 3) = 0 + 4(4 + 2\lambda) - 3(\lambda - 3) = 16 + 8\lambda - 3\lambda + 9 = 25 + 5\lambda$$

Igualándolo a cero

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$$

$$25 + 5\lambda = 0$$

$$5\lambda = -25$$

$$\lambda = -5$$

El punto R pedido es

$$(1 + 2\lambda, 5 + 2\lambda, \lambda) = (1 - 10, 5 - 10, -5) = (-9, -5, -5)$$

$$R = (-9, -5, -5)$$

- c) El área del triángulo PQR al ser rectángulo en P es igual a la longitud de la base (módulo del vector PR por la longitud de la altura (módulo del vector PQ) partido por 2.

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-9, -5, -5) - (1, 1, 3) = (-10, -6, -8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{10^2 + 6^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{200}}{2} = \boxed{25\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

También se puede realizar por la fórmula:

Área del paralelogramo definido por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de los vectores partido por 2.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & -3 \\ -10 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -32i + 30j - (-40k + 18i) = -50i + 30j + 40k = (-50, 30, 40)$$

$$\text{Área del triángulo PQR} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{50^2 + 30^2 + 40^2}}{2} = \frac{\sqrt{5000}}{2} = \boxed{25\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

- [0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
- [0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
- [0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

- a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20		40
No lee periódico			
	30		100

De estos datos completamos el resto de datos:

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20	20	40
No lee periódico	10	50	60
	30	70	100

Probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones =
 = Lee el periódico y no revistas + Lee revistas y no el periódico + Lee ambos tipos de publicaciones = 20 + 10 + 20 = 50 = 50% = **0'5**

- b) Probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicación (en el cruce de no leer corazón y no leer periódico) = 50% = **0'5**
- c) Probabilidad solo lea revistas del corazón = 10 % = **0'1**