PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax+y-2z=0 \\ x+y-az=-1 \\ x+y+z=a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

A.3: Considere la recta $r:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.
b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) **[1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
b) **[0,5 p.]** Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
b) **[0,5 p.]** Para $a=1$, calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $XA+2I=2A$, donde I es la matriz identidad 3x3.

B.2:

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.
b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).
c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice *C* está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+z=1$

a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.
b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa son del 0,5% y del 2%, respectivamente.

a) **[1 p.]** Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
b) **[1,5 p.]** Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

SOLUCIONES

OPCIÓN A:

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax+\ \ y-2z=0 \\ x+\ \ y-az=-1 \\ x+\ \ y+\ \ z=a \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para ***a = 2.***
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Discutamos el sistema y luego respondemos a cada apartado.
La matriz de coeficientes asociado al sistema es

$A=\begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a-a-2+2-1+a^2=a^2-1$

Igualamos a cero el determinante.

$|A|=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$

Distinguimos tres casos distintos.

CASO 1. $a\neq -1\ y\ a\neq 1$

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 al igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única.

CASO 2. $a=1$

La matriz A queda

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tiene determinante nulo y su rango es menor de 3.

Su rango es 2, ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 1ª es no nulo. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$.

El rango de la ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es 3?

Tomamos el menor que resulta de quitar la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2+2+1 = 4 \neq 0$$. El rango de A/B es 3.

Como Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B el sistema no tiene solución.

CASO 3. $a=-1$

La matriz A queda

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$. Tiene determinante nulo y su rango es menor de 3.

Su rango es 2, ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y la columna 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

El rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es 3?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 3ª columna

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$. El rango de A/B es menor de 3.

El rango es 2 ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y la columna 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Como rango de A es y rango de la ampliada es 2 y es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones.

a) Para $a \neq -1 \; y \; a \neq 1$ el sistema tiene una única solución.

Resolvemos el sistema para a = 2 con el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2^2 - 1 = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4+2+4+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2-4-2+8}{3} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-1-2+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

La solución es $x=1;\ y=0;\ z=1$

b) Para $a=-1$. Lo resolvemos.

El sistema queda:

$$\begin{cases} -x+\ y-2z=0 \\ x+\ y+z=-1 \\ x+\ y+\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \text{Ecuación } 2^{\text{a}} = \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -x+\ y-2z=0 \\ x+\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+\ y=2z \\ x+\ y=-1-z \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Sumo las ecuaciones}} \\ -x & +y & = & 2z \\ x & +y & = & -1-z \\ \hline & 2y & = & -1+z \end{array} \right\} \Rightarrow 2y=-1+z \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1+z}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+\frac{-1+z}{2}=2z \Rightarrow -2x-1+z=4z \Rightarrow -2x=1+3z \Rightarrow \boxed{x=\frac{1+3z}{-2}}$$

La solución es $x=\frac{1+3t}{-2};\ y=\frac{-1+t}{2};\ z=t$

c) Para $a=1$ el sistema no tiene solución. Razonado en el caso 2 del inicio del ejercicio.

A.2:

a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

a) La derivada de la función es

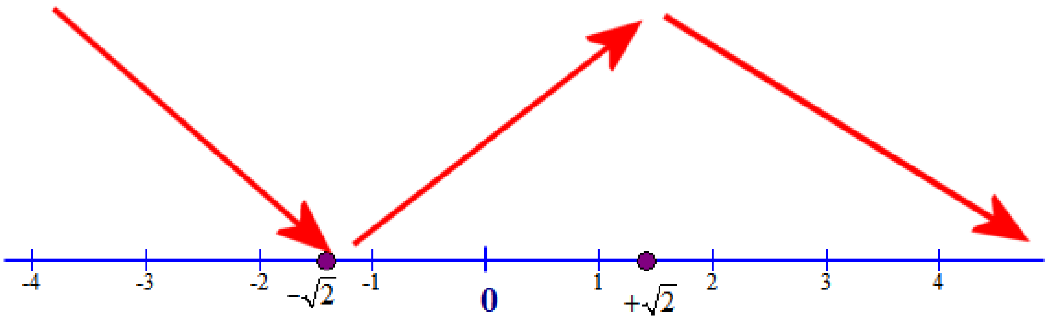
$$f(x)=\frac{x^2+2x}{e^x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\cancel{e^x}\left(2x+2-x^2-2x\right)}{\cancel{e^x}\cdot e^x}=\frac{-x^2+2}{e^x}$$

Igualamos a cero la derivada

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+2}{e^x}=0 \Rightarrow -x^2+2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Estudiemos la variación del signo de la derivada en cada intervalo en que se divide la recta real con estos dos puntos de separación.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos x = –2, la derivada vale $f'(-2)=\frac{-(-2)^2+2}{e^{-2}}=\frac{-4+2}{e^{-2}}=-2e^2<0$. La función decrece.
- En $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ tomamos x = 0, la derivada vale $f'(0)=\frac{-0^2+2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0$. La función crece.
- En $\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos x = 2, la derivada vale $f'(2)=\frac{-2^2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0$. La función decrece.



La función tiene un mínimo relativo en $x=-\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x=+\sqrt{2}$.
La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(+\sqrt{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{1-1}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}$$

$$=\frac{1-1-0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\frac{1-1}{1+0-1}=$$

$$=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

A.3: Considere la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

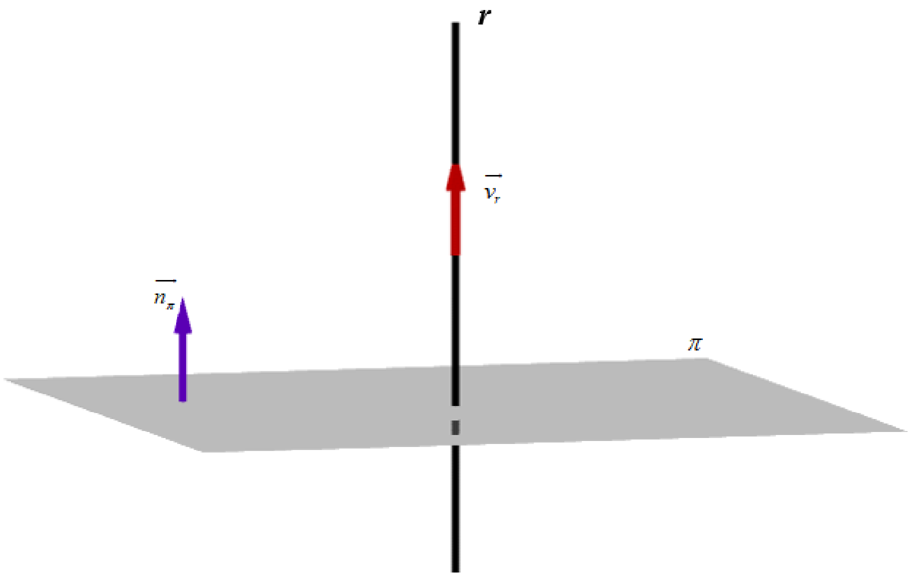
a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta *r* y el plano π.
b) **[1,5 p.]** En el caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

a)

De $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ tenemos su vector director $\overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)$

De $\pi: x-2y-z=-1$ tenemos su vector normal $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-2,-1)$

Si comparamos estos vectores vemos que el vector director de la recta y el normal del plano son de coordenadas proporcionales, por lo que están en la misma dirección. Recta y plano se cortan perpendicularmente.



b) Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por ecuación de recta y del plano. Antes pasamos la recta a ecuaciones paramétricas.

$$r:\left.\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array}\right\}$$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y-z=-1 \\ r:\begin{array}{l} x=-1-t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow -1-t-2(-3+2t)-t=-1 \Rightarrow -1-t+6-4t-t=-1$$

$$-6t=-6 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1-1=-2 \\ y=-3+2=-1 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(-2,-1,1)}$$

El ángulo que forman recta y plano es de 90º. Ya hemos visto que se cortan perpendicularmente.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:
a) **[1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.
b) **[0,5 p.]** Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

a) p = Probabilidad de que una flecha dé en la diana = 0,4
n = Número de lanzamientos.
X = Número de dianas en 9 lanzamientos.
X es una distribución binomial de parámetros p = 0, y n = 9.

X = B(9, 0´4)

b)

Media = n · p = 9 · 0,4 = 3,6

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,47$

c)

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) =$$

$$= \{\text{Mirando la tabla de la binomial}\} = 0,1672 + 0,0743 + 0,0212 + 0,0035 + 0,0003 = \boxed{0,2665}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

También se puede calcular estas probabilidades usando la fórmula:

$P(X = m) = \binom{9}{m} 0,4^m \cdot 0,6^{9-m}$; *siendo* $m =$ número de dianas en 9 lanzamientos. Es un proceso más laborioso.

OPCIÓN B:

B.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
b) **[0,5 p.]** Para $a=1$, calcule la inversa de A.
c) **[1 p.]** Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $XA+2I=2A$, donde I es la matriz identidad 3x3.

a) A tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1+a^2-a=a^2-a-1$$

Si igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a-1=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\begin{cases}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\[2mm] =\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando a es distinto de $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Para $a=1$ la matriz tiene inversa ya que

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=1-1-1=-1\neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

c) Para $a=1$, la matriz A tiene inversa. Calculada en el apartado anterior.
Despejamos X de la ecuación matricial

$$XA+2I=2A \Rightarrow XA=2A-2I \Rightarrow XAA^{-1}=(2A-2I)A^{-1} \Rightarrow X=(2A-2I)A^{-1}$$

$$X=2AA^{-1}-2IA^{-1}=2I-2A^{-1}$$

$$X=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2&2\\2&-2&2\\-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}6&-2&2\\2&0&2\\-2&0&0\end{pmatrix}}$$

B.2:

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1,2).

c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

a)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{x}=t \to x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right\}=\int\frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=2\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=$$

$$=2\left[\int\frac{1+t^2}{1+t^2}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt\right]=2\left[\int dt-arctgt\right]=2\left[t-arctgt\right]=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio}\\ \sqrt{x}=t\end{array}\right\}=$$

$$=\boxed{2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C}$$

b) Como hemos visto la primitiva es $F(x)=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C$.

Al pasar por el punto (1,2) significa que:

$$F(1)=2 \Rightarrow 2=2\sqrt{1}-2arctg(1)+C \Rightarrow 2=2-2\cdot\frac{\pi}{4}+C \Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x)=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x}=\boxed{0}$, ya que el grado del denominador es 1 y el del numerador es 1/2. Es mayor el grado del denominador y por tanto el límite vale 0.

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

B.3: Los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x-y+z=1$
a) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano π.
b) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice *C* sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

a) Si la recta es perpendicular al plano $\pi : 2x-y+z=1$ el vector director de la recta es el vector normal del plano, es decir, $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(2,-1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,-1,1)\\ \text{Pasa por } B=(1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{array}\right\}}$$

b) El punto C al pertenecer a la recta *r* tiene coordenadas $C(1+2t,1-t,1+t)$ para un valor de *t*, que debemos determinar.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen los vértices entre si.

$$\text{Área } ABC=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$$

Calculamos las coordenadas de los vectores:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)-(0,-1,1)=(1,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(1+2t,1-t,1+t)-(0,-1,1)=(1+2t,\,2-t,\,t)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 2 & 0\\ 1+2t & 2-t & t\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2ti+(2-t)k-(2+4t)k-tj=2ti-tj+(2-t-2-4t)k=(2t,-\text{t},-5t)$$

$$\text{Área } ABC=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{2}=\frac{\sqrt{4t^2+t^2+25t^2}}{2}=\frac{\sqrt{30t^2}}{2}=\frac{\sqrt{30}\cdot|t|}{2}$$

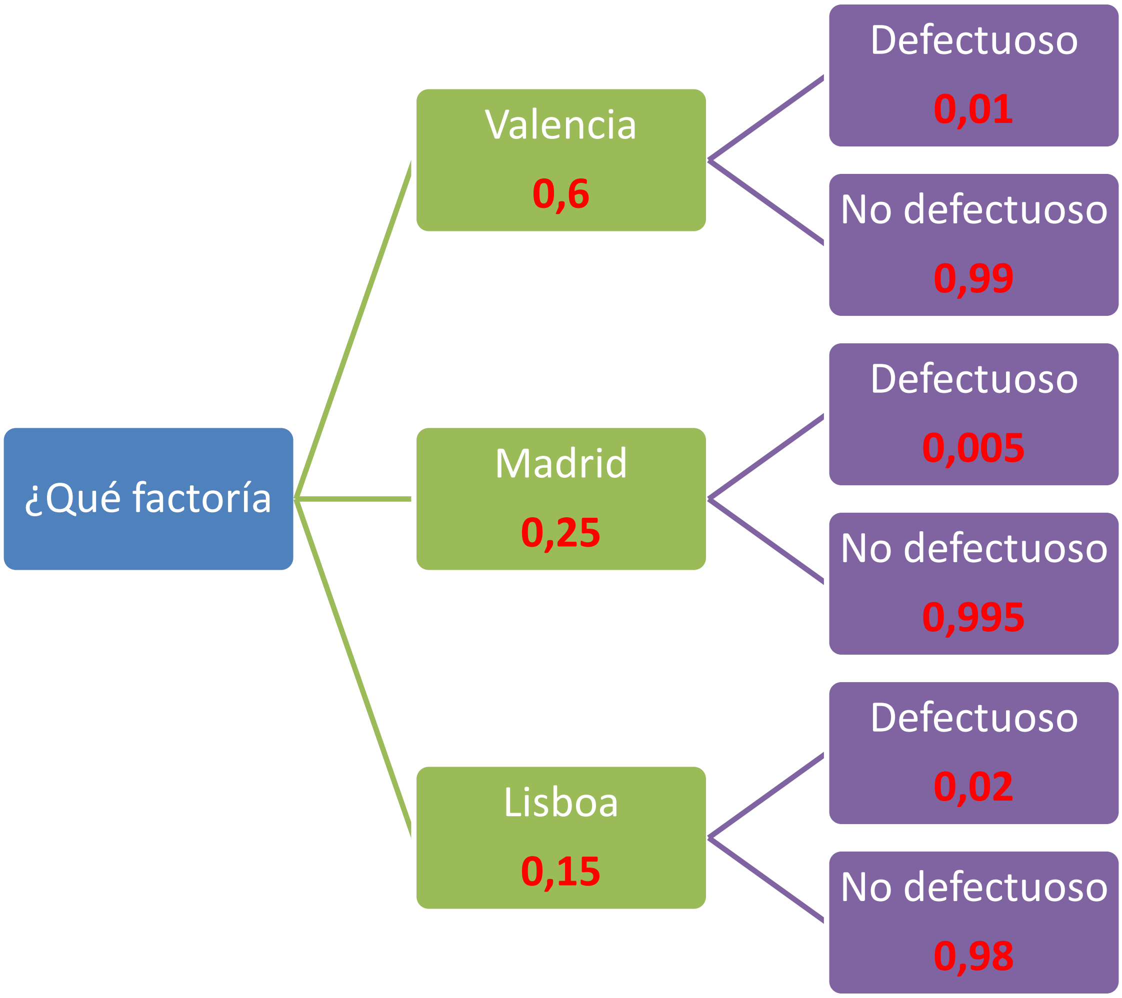
Como el área debe valer $3\sqrt{30}$, entonces:

$$3\sqrt{30}=\frac{\sqrt{30}\cdot|t|}{2}\Rightarrow 6\sqrt{30}=\sqrt{30}\cdot|t|\Rightarrow |t|=6\Rightarrow\begin{cases} t=6\to C(1+12,1-6,1+6)\\ o\\ t=-6\to C(1-12,1+6,1-6)\end{cases}$$

El punto C puede tener las coordenadas C(13, –5, 7) o bien C(–11, 7, –5)

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa son del 0,5% y del 2%, respectivamente.
a) **[1 p.]** Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
b) **[1,5 p.]** Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Construimos un diagrama de árbol



a)

$$P(No\ defectuoso) = P(Valencia)\cdot P(No\ defectuoso/Valencia) +$$
$$+P(Madrid)\cdot P(No\ defectuoso/Madrid) + P(Lisboa)\cdot P(No\ defectuoso/Lisboa) =$$
$$= 0,6\cdot 0,99 + 0,25\cdot 0,995 + 0,15\cdot 0,98 = \boxed{0,9897}$$

b)

$$P(Madrid/Defectuoso) = \frac{P(Madrid\ y\ defectuoso)}{P(Defectuoso)} =$$
$$= \frac{P(Madrid)\cdot P(Defectuoso/Madrid)}{1-0,9897} = \frac{0,25\cdot 0,005}{0,0103} = \boxed{0,1220}$$