Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA — JULIO 2019

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x\ \ +y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

Ejercicio A2

Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ y que contenga al punto P(1,0,0). ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Ejercicio A3

Sea *f* la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

a) Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que su gráfica contenga al punto P(0,1) y para que *f* tenga un mínimo local en el punto Q(2,0).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

Ejercicio A4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y=x(3-x)$ y por $y=x^2$.
Dibujar R y calcular su área.

Ejercicio A5

Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda elegida al azar:

a) Calcular la probabilidad de que se obtenga cara.
b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad de que sea la moneda R?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA — JULIO 2019

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3 x 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,
b) se multiplica a la tercera columna por –2,
c) se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Ejercicio B2

Se considera la recta *r*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Y el punto P(1,2,5) exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y a P.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar *f*.

Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Ejercicio B5

De los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Soluciones

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x\ +y-z=1 \\ 2x-2y+Az=A \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes del sistema es:

$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & A \end{pmatrix}$ con determinante $|C|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & A \end{vmatrix}=A-4-6-(6+2A+2)=-A-18$

Igualamos a cero el determinante para distinguir los distintos casos posibles en la resolución del sistema.

$$|C|=0 \Rightarrow -A-18=0 \Rightarrow A=-18$$

Distinguiremos 2 casos.

CASO 1. A $\neq -18$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas del sistema. El sistema es **compatible determinado** (una única solución)

CASO 2. A = -18

El sistema queda:

$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x\ +y-z=1 \\ 2x-2y-18z=-18 \end{cases}$ y si aplicamos Gauss obtenemos el sistema equivalente siguiente:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x\ +y-z=1 \\ 2x-2y-18z=-18 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & y & -z & =1 \\ -x & -2y & -3z & =-6 \\ \hline & -y & -4z & =-5 \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 2· Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -2y & -18z & =-18 \\ -2x & -4y & -6z & =-12 \\ \hline & -6y & -24z & =-30 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ \quad -y-4z=-5 \\ \quad -6y-24z=-30 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 6 · Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrr} -6y & -24z & =-30 \\ 6y & +24z & =30 \\ \hline & 0 & =0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -y-4z=-5 \\ 0=0 \end{cases}$$

Este sistema es **compatible indeterminado** (tiene infinitas soluciones). Tiene más incógnitas que ecuaciones.

Ejercicio A2

Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ y que contenga al punto P(1,0,0). ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

El vector director de la recta pedida $\overrightarrow{v_r}=(a,b,c)$ debe ser ortogonal al vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,3)$ y su producto escalar debe ser cero.

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(a,b,c)\cdot(1,2,3)=a+2b+3c=0$$

Esta recta no es única, ya que hay infinitas rectas paralelas al plano que pasan por un punto P (de hecho existe todo un plano paralelo a otro que pase por un punto P.

Si le damos valores a = 2 y b = –1, nos queda $a+2b+3c=0 \Rightarrow 2-2+3c=0 \Rightarrow c=0$

El vector director de una recta paralela al plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$ es $\overrightarrow{v_r}=(2,-1,0)$ y por tanto la recta pedida tendría ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(2,-1,0) \\ \text{Pasa por } P(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}}$$

Ejercicio A3

Sea *f* la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$.

a) Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que su gráfica contenga al punto P(0,1) y para que *f* tenga un mínimo local en el punto Q(2,0).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?

a) Si $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ pasa por P(0,1) entonces

$$f(0)=1 \Rightarrow 0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

Si $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ tiene un mínimo en Q(2,0), entonces pasa por ese punto, por lo que

$$f(2)=0 \Rightarrow 2^3+A\cdot 2^2+2B+1=0 \Rightarrow 8+4A+2B+1=0 \Rightarrow 4A+2B=-9$$

Además la derivada debe anularse en x = 2.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 2^2+2A\cdot 2+B=0 \Rightarrow 4A+B=-12$$

Si juntamos las tres condiciones, nos queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}4A+2B=-9\\4A+B=-12\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª}\\ 4A \quad +B \quad =-12\\ -4A \quad -2B \quad =9\\ \hline \qquad -B \quad =-3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4A+2B=-9\\-B=-3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4A+6=-9\\ \boxed{B=3}\end{array}\right\}\Rightarrow 4A=-15\Rightarrow\boxed{A=\frac{-15}{4}}$$

Los valores son A = –15/4; B = 3; C = 1 y la función es $f(x)=x^3-\frac{15}{4}x^2+3x+1$

b) Calculemos su derivada y comprobemos si tiene más puntos críticos.

$$f(x)=x^3-\frac{15}{4}x^2+3x+1\Rightarrow f\,'(x)=3x^2-\frac{15}{2}x+3$$

Igualamos a cero

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 3x^2-\frac{15}{2}x+3=0\Rightarrow 6x^2-15x+6=0$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{12}=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{12}=\frac{15\pm 9}{12}=\begin{cases}x=\frac{15+9}{12}=\frac{24}{12}=2\\ x=\frac{15-9}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

El otro punto es x = 1/2. Comprobamos con la segunda derivada que tipo de punto crítico es.

$$f\,'(x)=3x^2-\frac{15}{2}x+3\Rightarrow f\,''(x)=6x-\frac{15}{2}$$

Sustituyendo x = 1/2

$$f\,''\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{9}{2}<0$$

En x = 1/2 hay un máximo local.

Ejercicio A4

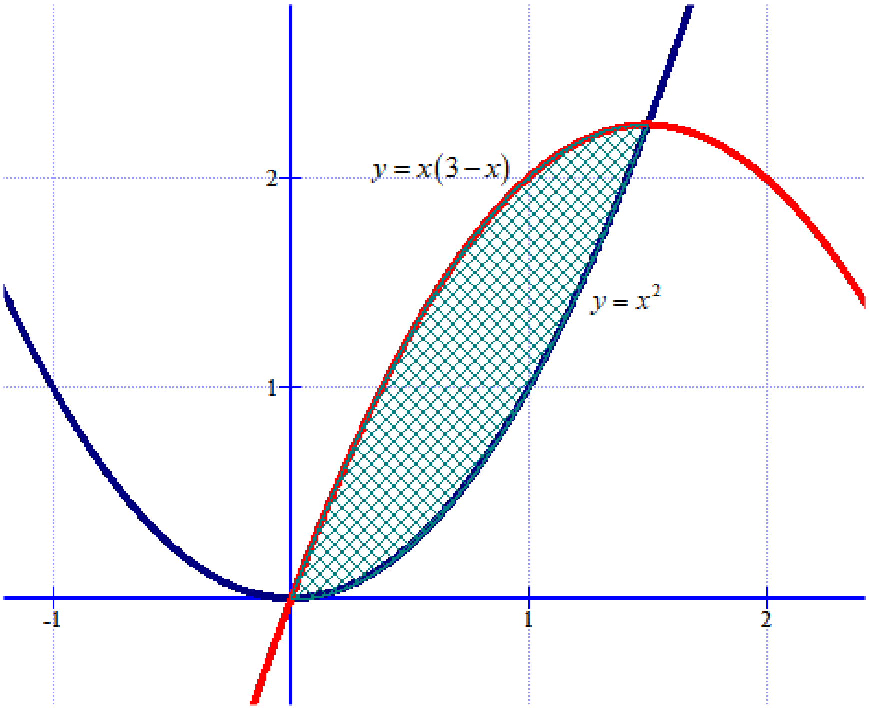
Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y=x(3-x)$ y por $y=x^2$.

Dibujar R y calcular su área.

Haciendo unas tablas de valores para las parábolas del ejercicio se obtiene el dibujo del recinto

x	$y=x(3-x)$
-1	-4
0	0
1	2
2	2

x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4



Averigüemos sus puntos de corte para poder calcular los límites de integración del recinto.

$$\left.\begin{array}{l} y=x(3-x) \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x-x^2=x^2 \Rightarrow 3x-2x^2=0 \Rightarrow$$

$$x(3-2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\acute{A}rea=\int_0^{\frac{3}{2}} 3x-x^2-x^2dx=\int_0^{\frac{3}{2}} 3x-2x^2dx=\left[3\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}}=$$

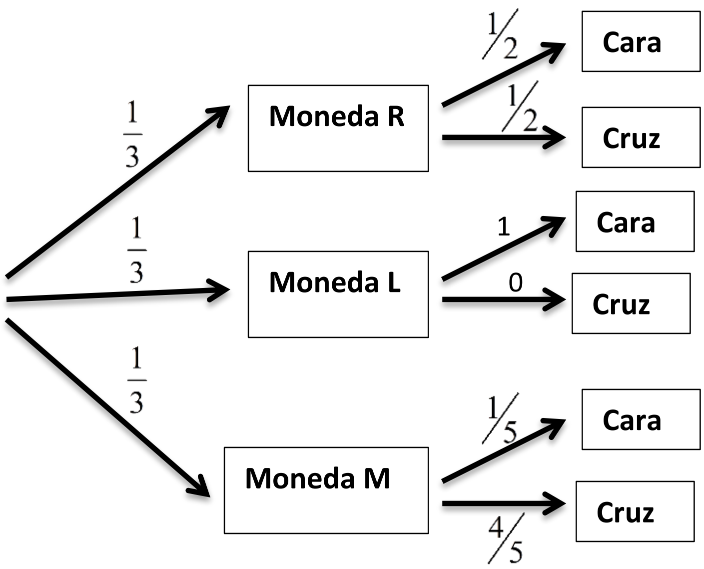
$$=\left[3\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}-2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3}\right]-\left[3\frac{0^2}{2}-2\frac{0^3}{3}\right]=\frac{27}{8}-\frac{9}{4}=\frac{27}{8}-\frac{18}{8}=\boxed{\frac{9}{8}u^2}$$

Ejercicio A5

Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda elegida al azar:

a) Calcular la probabilidad de que se obtenga cara.
b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad de que sea la moneda R?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar el experimento.



a) P(Sacar cara) = P(Elegir moneda R) · P(Sacar cara con moneda R) + P(Elegir moneda L) · P(Sacar cara con moneda L) + P(Elegir moneda M) · P(Sacar cara con moneda M) =

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\boxed{\frac{17}{30}}$$

b)

$$P\left(sea\ la\ moneda\ R,\ sabiendo\ que\ ha\ salido\ cruz\right)=P\left(R/Cruz\right)=$$

$$=\frac{P\left(R\cap Cruz\right)}{P\left(Cruz\right)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{17}{30}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{30}}=\frac{30}{6\cdot 13}=\boxed{\frac{5}{13}}$$

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3 x 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,
b) se multiplica a la tercera columna por –2,
c) se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Si la matriz de partida tiene determinante 5 si cambiamos dos filas entre si el determinante cambia de signo y vale –5. Si multiplicamos una columna por –2 el determinante de esa matriz también se multiplica por –2, es decir vale 10. Si multiplicamos toda la matriz (de orden 3 x 3) el determinante se multiplica por 2^3 = 8, es decir val 80. Si se traspone la matriz el determinante no cambia.

El determinante valdrá 80.

Ejercicio B2

Se considera la recta *r*

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

Y el punto P(1,2,5) exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y a P.

La recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (1,2,3)$ y pasa por el punto Q(1,2,3).

Para hallar la ecuación del plano utilizamos el punto P(1,2,5) y los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1,2,3)$ y

$\overrightarrow{PQ} = (1,2,5) - (1,2,3) = (0,0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,5) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{PQ} = (0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 4 - 2y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{2x - y = 0}$$

El plano pedido tiene ecuación $2x - y = 0$.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar *f.*

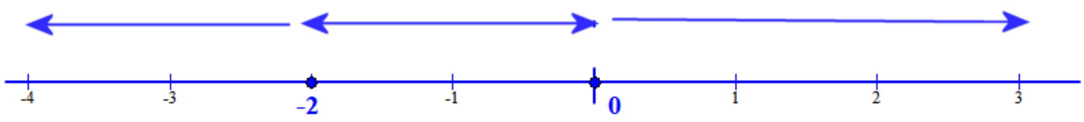
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ es una función continua, hallando los extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y una tabla podemos representarla.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f\,'(x) = 3x^2 + 6x$

Igualamos a cero

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow x(3x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x+6=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

Al existir dos puntos críticos, la recta real se divide en 3 partes. Veamos que ocurre en cada una de ellas.

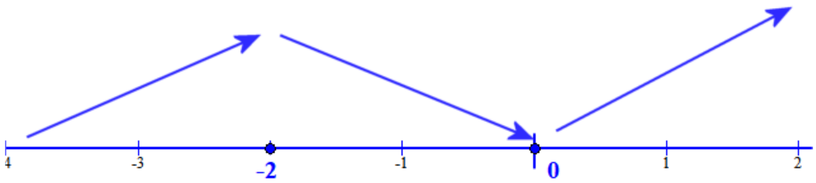


En $(-\infty,-2)$ tomamos el valor x = –3 → $f\,'(-3)=3(-3)^2+6(-3)=27-18=9>0$ La función crece

En $(-2,0)$ tomamos el valor x = –1 → $f\,'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=3-6=-3<0$ La función decrece

En $(0,+\infty)$ tomamos el valor x = 1 → $f\,'(1)=3(1)^2+6(1)=3+6=9>0$ La función crece.

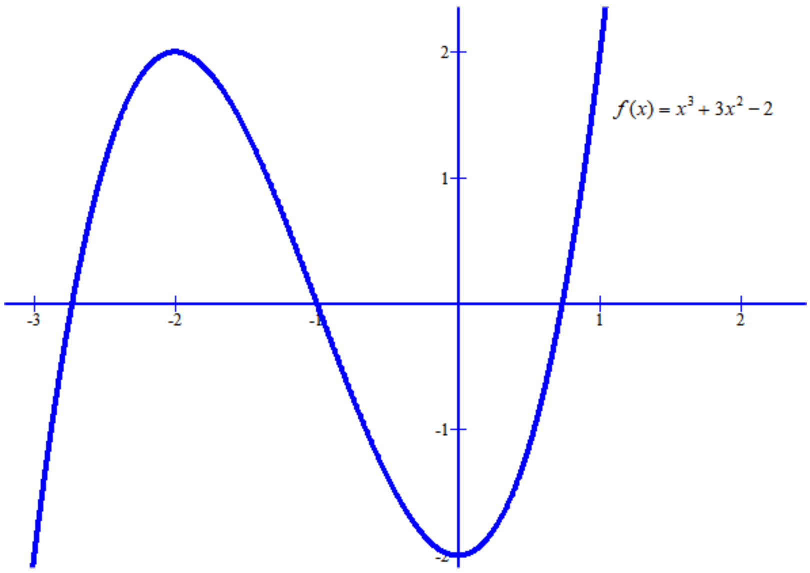
El esquema del comportamiento de la función es:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$. Presenta un máximo local en x = –2 y un mínimo local en x = 0.

Su representación gráfica es:

x	$y=x^3+3x^2-2$
-3	-2
-2	2
-1	0
0	-2



Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Para calcular la integral $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ hay que descomponer la fracción algebraica en suma de fracciones simples.

$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$
$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$
$$8x+7 = A(x+3)+B(x+1)$$
$$x=-1 \Rightarrow -8+7 = A(2) \Rightarrow -1 = 2A \Rightarrow A = \frac{-1}{2}$$
$$x=-3 \Rightarrow -24+7 = B(-2) \Rightarrow -17 = -2B \Rightarrow B = \frac{17}{2}$$
$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3}$$

Por lo que:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx = \int \frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3}dx = \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{17/2}{x+3}dx = \boxed{-\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C}$$

Ejercicio B5

De los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

a) Siendo X = Puntos obtenidos por un estudiante. X = N(40, 10)
Para calcular el porcentaje calculo la probabilidad de que un estudiante esté en el rango de puntuación pedida:

$$P(30 < X < 60) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{30-40}{10} < \frac{x-40}{10} < \frac{60-40}{10}\right) =$$
$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0,9772 - (1 - P(z < 1)) =$$
$$= 0,9772 - (1 - 0,8413) = 0,8185$$

El porcentaje de alumnado entre 30 y 60 puntos es del 81,85 %

b) Calculamos la probabilidad de que un estudiante esté con esa nota.

$$P(X > 60) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-40}{10} > \frac{60-40}{10}\right) = P(Z > 2) =$$
$$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

De los 500 estudiantes hay 0,0228 · 500 = 12 que tienen puntuación superior a 60 puntos.