Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA — JUNIO 2019

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de *m*, el sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x \qquad\qquad + mz = m-2 \\ \qquad -y \quad + z = m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Ejercicio A2

Sean la recta

$r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $x-y+Az=0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a ***r***?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta ***r*** que pasa por el punto (0,0,0).

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2+64$ y el **punto exterior** a su gráfica P(6,0), encontrar la recta o rectas tangentes a *f* que pasen por *P*.

Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Ejercicio A5

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si se ha sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de *a* para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Ejercicio B2

Se consideran los tres puntos A(0,0,1), B(1,1,1) y C(–1,–1,2). ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Ejercicio B3

Sea *f* la función $f(x)=x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de *f*. Hallar los máximos y mínimos de *f*.

Ejercicio B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y=x+2$ y por la parábola $y=x^2$. Calcular su área.

Ejercicio B5

Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) Sea superior a 1500.
b) Esté comprendido entre 1000 y 1100.

Soluciones

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de *m*, el sistema de ecuaciones

$$S=\begin{cases}(m+3)x+my+mz=m-1\\ 3x \qquad\qquad +mz=m-2\\ \qquad -y \quad +z=m-3\end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

La matriz de los coeficientes del sistema $S=\begin{cases}(m+3)x+my+mz=m-1\\ 3x \qquad\qquad +mz=m-2\\ \qquad -y \quad +z=m-3\end{cases}$ es:

$A=\begin{pmatrix}m+3 & m & m\\ 3 & 0 & m\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}m+3 & m & m\\ 3 & 0 & m\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+0-3m-\left(0+3m-m(m+3)\right)=-3m-3m+m^2+3m=m^2-3m$$

Lo igualamos a cero, para establecer distintos casos en la resolución del sistema.

$$m^2-3m=0\Rightarrow m(m-3)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m=3\end{cases}$$

Distinguimos 3 casos.

CASO 1. $m\neq 0;\, m\neq 3$.

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada e igual que el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m=0$.

El sistema queda:

$$S=\begin{cases}3x=-1\\ 3x=-2\\ -y+z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}\\ x=\dfrac{-2}{3}\\ -y+z=-3\end{cases}$$

Este sistema es incompatible (no tiene solución). La incógnita x no puede tomar dos valores distintos.

CASO 3. $m=3$.

El sistema queda:

$$S=\begin{cases}6x+3y+3z=2\\3x \qquad +3z=1\\ \quad -y \quad +z=0\end{cases}$$ que podemos buscar su sistema equivalente triangular utilizando el método de Gauss.

$$S=\begin{cases}6x+3y+3z=2\\3x \qquad +3z=1\\ \quad -y \quad +z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 1^{\text{a}} \text{ - } 2\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}6x & +3y & +3z & =2\\ -6x & & -6z & =-2\\ \hline & 3y & -3z & =0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ \quad +3y-3z=0\\ \quad -y \quad +z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 3\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}}\\ \begin{array}{ccc}3y & -3z & =0\\ -3y & +3z & =0\\ \hline & 0 & =0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ \quad +3y-3z=0\\ \qquad\qquad 0=0\end{cases}$$

Este sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Como pide resolverlo, seguimos con el sistema triangular equivalente.

$$\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ \quad +3y-3z=0\\ \qquad\qquad 0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ \quad y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+3y+3z=2\\ \boxed{y=z}\end{cases}\Rightarrow 6x+3z+3z=2\Rightarrow 6x=2-6z$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{6}-\frac{6z}{6}\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{3}-z}$$

La solución en el caso de indeterminación es $x=\frac{1}{3}-t;\ y=t;\ z=t$.

Ejercicio A2

Sean la recta

$r\equiv\begin{cases}4x-3y+4z=1\\3x-2y+z=0\end{cases}$ y el plano $x-y+Az=0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a ***r***?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta ***r*** que pasa por el punto (0, 0, 0).

a) El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 12j - 8k - (-9k + 4j - 8i) = 5i + 8j + k = (5,8,1)$$

Y el vector normal del plano es $(1,-1,A)$

Para que sea el plano y la recta paralelos deben ser ortogonales el vector normal al plano y el director de la recta, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (5,8,1)\cdot(1,-1,A) = 5 - 8 + A = 0 \Rightarrow -3 + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

b) El plano perpendicular a la recta r debe tener vector normal el director de la recta $\vec{v_r} = (5,8,1)$

El plano tiene ecuación $5x + 8y + z + D = 0$ y como debe pasar por el punto (0, 0, 0), debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + z + D = 0 \\ \text{Pasa por } (0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

El plano pedido tiene ecuación $5x + 8y + z = 0$

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el **punto exterior** a su gráfica P(6,0), encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por *P*.

Necesitamos averiguar en que puntos de la curva su recta tangente pasa por el punto P(6,0).

La recta tangente a $f(x) = x^2 + 64$ en un punto (a, f(a)) de la curva tiene ecuación:

$$y - f(a) = f\,'(a)(x - a)$$

Sustituyamos en esta ecuación el valor de *f(a)* y *f´(a).*

$$f(x) = x^2 + 64 \Rightarrow f\,'(x) = 2x \Rightarrow \begin{cases} f(a) = a^2 + 64 \\ f\,'(a) = 2a \end{cases}$$

La recta tangente es:

$$y - a^2 - 64 = 2a(x - a) \Rightarrow y = 2ax - 2a^2 + a^2 + 64 \Rightarrow y = 2ax - a^2 + 64$$

Como debe pasar por P(6,0), se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2ax - a^2 + 64 \\ \text{Pasa por P}(6,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 12a - a^2 + 64 \Rightarrow -a^2 + 12a + 64 = 0 \Rightarrow a = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(-1)64}}{-2}$$

$$a=\frac{-12\pm\sqrt{144+256}}{-2}=\frac{-12\pm 20}{-2}=\begin{cases} a=\dfrac{-12+20}{-2}=-4 \\ a=\dfrac{-12-20}{-2}=16\end{cases}$$

Las rectas tangentes son:

$$a=-4\Rightarrow y=-8x-16+64\Rightarrow \boxed{y=-8x+48}$$

$$a=16\Rightarrow y=32x-256+64\Rightarrow \boxed{y=32x-192}$$

Ejercicio A4

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

$$\int xe^{-4x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^{-4x}dx\rightarrow v=\int e^{-4x}dx=\dfrac{e^{-4x}}{-4}\end{array}\right\}=x\frac{e^{-4x}}{-4}-\int\frac{e^{-4x}}{-4}dx=\frac{-xe^{-4x}}{4}+\frac{1}{4}\int e^{-4x}dx=$$

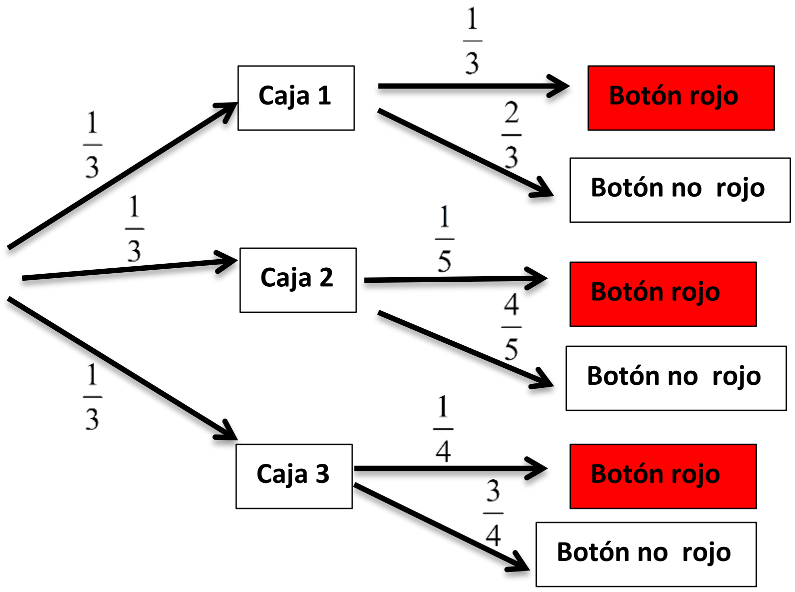
$$=\frac{-xe^{-4x}}{4}+\frac{1}{4}\frac{e^{-4x}}{-4}=\frac{-xe^{-4x}}{4}-\frac{e^{-4x}}{16}+C$$

Ejercicio A5

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si se ha sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

Realicemos un árbol para aclarar los sucesos posibles y su probabilidad.



a) P(Elegir botón rojo) = P(Elegir caja 1) · P(Elegir botón rojo en caja 1) + P(Elegir caja 2) · P(Elegir botón rojo en caja 2) + P(Elegir caja 3) · P(Elegir botón rojo en caja 3) =

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{47}{180}}$$

b)

$$P(\text{Sea de Caja 1, sabiendo que es rojo})=P(\text{Caja 1/Botón rojo})=$$

$$=\frac{P(\text{Caja 1 }\cap\text{Botón rojo})}{P(\text{Botón rojo})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}}=\frac{180}{9\cdot 47}=\boxed{\frac{20}{47}}$$

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de *a* para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

$$A(a)^2=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&a&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1+a&a^2&0\\3&a+1&1\end{pmatrix}$$

Su determinante valdrá

$$\left|A(a)\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1+a&a^2&0\\3&a+1&1\end{vmatrix}=1\cdot \mathrm{a}^2\cdot 1=a^2 \text{ debe ser igual a 4.}$$

$$a^2=4\Rightarrow \boxed{a=2 \quad o \quad a=-2}$$

Ejercicio B2

Se consideran los tres puntos A(0,0,1), B(1,1,1) y C(–1,–1,2). ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Para comprobar si están alineados veremos si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)-(0,0,1)=(1,1,,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-1,2)-(0,0,1)=(-1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\frac{1}{-1}=\frac{1}{-1}=\frac{0}{1}?$$

No son proporcionales, luego definen un plano. Averigüemos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,-1,1)\\ A(0,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-0&y-0&z-1\\1&1&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-z+1-(-z+1+y)=0$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C es $x-y=0$

Ejercicio B3

Sea f la función $f(x)=x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de *f*. Hallar los máximos y mínimos de *f*.

$$f(x)=x^2e^{-4x} \Rightarrow \boxed{f'(x)=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}}$$

$$f'(x)=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x} \Rightarrow f''(x)=2e^{-4x}-8xe^{-4x}-8xe^{-4x}+16x^2e^{-4x}$$

$$\boxed{f''(x)=16x^2e^{-4x}-16xe^{-4x}+2e^{-4x}}$$

Para hallar máximos y mínimos igualo a cero la derivada primera.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x}=0 \Rightarrow \left(2x-4x^2\right)e^{-4x}=0 \Rightarrow 2x-4x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x(1-2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1-2x=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Para ver cuál es máximo o mínimo sustituimos en la segunda derivada.

$$x=0 \to f''(0)=16\cdot 0^2\cdot e^{-4\cdot 0}-16\cdot 0\cdot e^{-4\cdot 0}+2e^{-4\cdot 0}=2>0 \Rightarrow x=0 \text{ es mínimo}$$

$$x=\frac{1}{2} \to f''\left(\frac{1}{2}\right)=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}-16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}+2e^{-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=4e^{-2}-8e^{-2}+2e^{-2}=-2e^{-2}<0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ es máximo}$$

Ejercicio B4

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y=x+2$ y por la parábola $y=x^2$. Calcular su área.

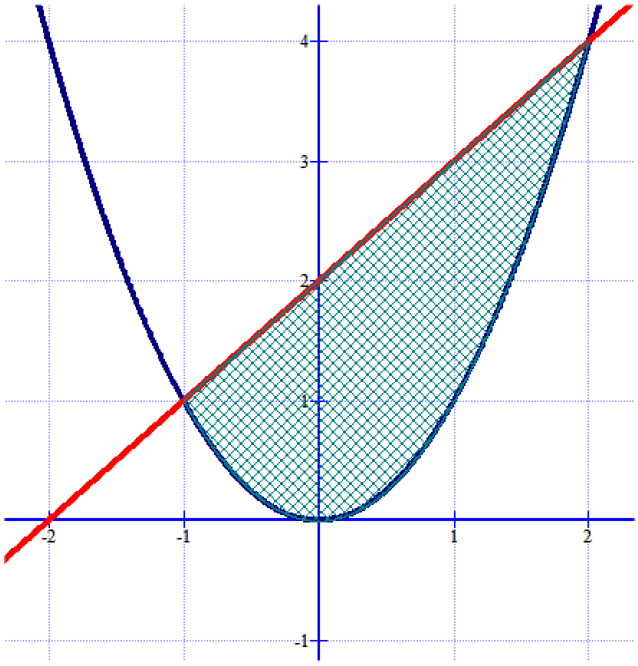
Realizamos una pequeña tabla de valores para dibujar tanto la recta como la parábola.

x	$y=x+2$
0	2
1	3
2	4

x	$y=x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$



El área del recinto se puede aproximar contando cuadraditos, …. Unas 4 unidades cuadradas.

Para calcularla con exactitud utilizamos la integral definida de la diferencia de las funciones con límites de integración –1 y 2.

$$Área = \int_{-1}^{2} (x+2) - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 2 - \frac{(-1)^3}{3}\right) =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{2} u^2}$$

Ejercicio B5

Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) Sea superior a 1500.
b) Esté comprendido entre 1000 y 1100.

Al lanzar un dado sale 5 con probabilidad $p = \frac{1}{6}$ y de no salir 5 con probabilidad $q = \frac{5}{6}$. Si lanzamos 6000 veces ese dado y contamos el número de veces que sale 5, estamos hablando de una distribución binomial de parámetros $p = \frac{1}{6}$ y $n = 6000$. $X = B\left(6000, \frac{1}{6}\right)$.

Debe de aproximarse a una normal, dado el alto número de repeticiones . La normal a la que se aproxima tiene parámetros $\mu = n \cdot p = 6000 \cdot \frac{1}{6} = 1000$ y

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5000}{6}} = 28,9$$

$X = B\left(6000, \frac{1}{6}\right)$ se aproxima por una distribución normal $N(1000,\ 28,9)$

a)

$$P(X > 1500) = \{\text{Ajuste de continuidad}\} = P(X > 1500,5) = \{Tipificamos\} =$$
$$= P\left(\frac{X - 1000}{28,9} > \frac{1500,5 - 1000}{28,9}\right) = P(Z > 17,3) = 0$$

b)

$$P(1000 < X < 1100) = \{\text{Ajuste de continuidad}\} = P(1000,5 < X < 1099,5) =$$
$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1000,5 - 1000}{28,9} < \frac{X - 1000}{28,9} < \frac{1099,5 - 1000}{28,9}\right) =$$
$$= P(0,017 < Z < 3,443) =$$
$$= P(Z < 3,443) - P(Z < 0,017) =$$
$$= 0,9997 - 0,508 = \boxed{0,4917}$$