PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2\,B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible *(2 puntos)* y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I *(2 puntos)*.
b) Los valores posibles del determinante de B. *(3 puntos)*
c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa *(2 puntos)*.

Solución:

a) ¿A es invertible?

$A^2 = -A - I$ *(despejando I)* $\rightarrow$ $I = -A^2 - A$ *(sacando factor común A)* $\rightarrow$ $I = A\,(-A - I)$

Por tanto, existe A^{-1} *y* $\boldsymbol{A^{-1} = -A - I}$

Cálculo de A^3,

$A^3 = A^2 \,.\, A = (-A - I)\,A = -A^2 - A = I$ *(según lo obtenido anteriormente)*

Por tanto, $\boldsymbol{A^3 = I}$

En la resolución de los siguientes apartados utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$|A\,.\,B| = |A|\,|B|, \qquad |A^n| = |A|^n, \qquad |n\,A| = \{por\ ser\ A\ 3x3\} = n^3\,|A|$

b) ¿$|B|$*?*

Como $B = 2\,B^3 \rightarrow |B| = |2\,B^3| =$ *(como B es 3x3)* $= 2^3\,|B^3| = 8\,|B|^3$

Luego, $|B| = 8\,|B|^3 \rightarrow |B| - 8\,|B|^3 = 0 \rightarrow |B|\,(1 - 8\,|B|^2) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} |B| = 0 \\ 1 - 8\,|B|^2 = 0 \rightarrow 1 = 8\,|B|^2 \rightarrow \dfrac{1}{8} = |B|^2 \rightarrow |B| = \pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Por tanto, los posibles valores del determinante de B son: $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0 *y* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) ¿$|B^2|$*? Sabiendo que existe* B^{-1}

Como $B = 2\,B^3$ *y como existe* B^{-1}

Multiplicando por la derecha por B^{-1}

$B\,B^{-1} = 2\,B^3\,B^{-1}$

$B\,B^{-1} = 2\,B^2\,B\,B^{-1}$

$I = 2\,B^2\,I$

$I = 2\,B^2$

$|I| = |2\,B^2|$, *como I es la matriz identidad y B es 3x3*

$1 = 8\,|B^2| \rightarrow |B^2| = \dfrac{1}{8}$

Por tanto, $|B^2| = \dfrac{1}{8}$

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano π*: 2 x + y + m z = n.*

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. *(3 puntos)*

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. *(3´5 puntos)*

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. *(3´5 puntos)*

Solución:

a) ¿m y n? / $r \cap \pi = punto$

Para que r y π *se corten en un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única (el punto de corte entre r y* π*), es decir, el sistema debe ser compatible y determinado.*

Para que el sistema $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \\ 2x+y+mz=n \end{cases}$ *sea compatible y determinado ran (A) = ran (A´) = 3*

Por tanto, para que ran (A) = 3 debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m-2+4+12+1+2m = 5m+15$$

$$5m+15=0 \quad \to \quad 5m=-15 \quad \to \quad m=\frac{-15}{5}=-3$$

Para $m \neq -3$, *ran (A) = 3 y como A´ es 3x4 también ran(A´) = 3*

Luego, ***para que la recta r y el plano*** π ***se corten en un punto debe ser m ≠ – 3 y n cualquier valor***.

Otra forma de resolverlo,

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta r,

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2=5\neq 0$, *el sistema a resolver es:* $\begin{cases} x-2y=1+2z \\ x+3y=1+z \end{cases}$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+2z & -2 \\ 1+z & 3 \end{vmatrix}}{5}=\frac{3+6z+2+2z}{5}=\frac{5+8z}{5}=1+\frac{8}{5}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{5}=\frac{1+z-1-2z}{5}=\frac{-z}{5}$$

Por tanto, $r:\begin{cases} x=1+\frac{8}{5}\lambda \\ y=\frac{-1}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$$2 \cdot \left(1 + \frac{8}{5}\lambda\right) - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$2 + \frac{16}{5}\lambda - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$\left(\frac{16}{5} - \frac{1}{5} + m\right)\lambda = n - 2$$

$$(3 + m)\,\lambda = n - 2$$

$$\lambda = \frac{n-2}{3+m}$$

Para que haya punto de corte λ *debe tener solución, por tanto* $3 + m \neq 0$ *y* $n - 2$ *cualquier valor, es decir,* $m \neq -3$ *y* n *cualquier valor.*

Luego, ***habrá punto de corte entre la recta r y el plano π cuando*** $\boldsymbol{m \neq -3}$ ***y n cualquier valor***.

b) ¿m y n? / r y π no se cortan.

De lo estudiado en el apartado anterior, al resolver el corte entre recta y plano llegamos a la ecuación:

$(3 + m)\,\lambda = n - 2$

Para que no se corten, la ecuación no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$3 + m = 0$ *y* $n - 2 \neq 0$ *(para que quede una ecuación de la forma* $0 = \text{núm} \neq 0$*)*

Por lo que, $m = -3$ *y* $n \neq 2$

Por tanto, ***r y π no se cortan para*** $\boldsymbol{m = -3}$ ***y*** $\boldsymbol{n \neq 2}$.

c) ¿m y n? / r $\subset \pi$

Para que la recta r esté contenida en el plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado a), $(3 + m)\,\lambda = n - 2$, *debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:*

$3 + m = 0$ *y* $n - 2 = 0$ *(para que quede una ecuación de la forma* $0 = 0$*)*

Por lo que, $m = -3$ *y* $n = 2$

Por tanto, ***r está contenida en π para*** $\boldsymbol{m = -3}$ ***y*** $\boldsymbol{n = 2}$.

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. *(1 + 2 puntos)*

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. *(3 puntos)*

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. *(2 puntos)*

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = f(0) = 0^3 - a\,.\,0 = 0 \;\rightarrow\; (0\,,\,0)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - a\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(x^2 - a) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \;\rightarrow\; x^2 = a \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{a} \\ \quad (\text{como } a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{a}) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son (0 , 0), $\left(\sqrt{a}\,,0\right)$ y $\left(-\sqrt{a}\,,0\right)$.

Monotonía.

$y = x^3 - a\,x, \quad a > 0$

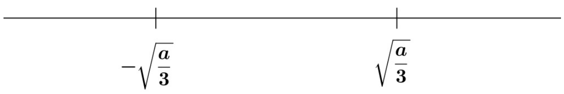
$y' = 3\,x^2 - a$

$3\,x^2 - a = 0$

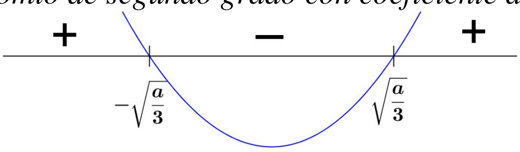
$3\,x^2 = a$

$$x^2 = \frac{a}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \text{como } a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:



y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, ***la función f es creciente en*** $\left(-\infty\,,-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\,,+\infty\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,,\,\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9\,x$

Dom $y = \Re$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: (0 , 0), (3 , 0) y (– 3 , 0).

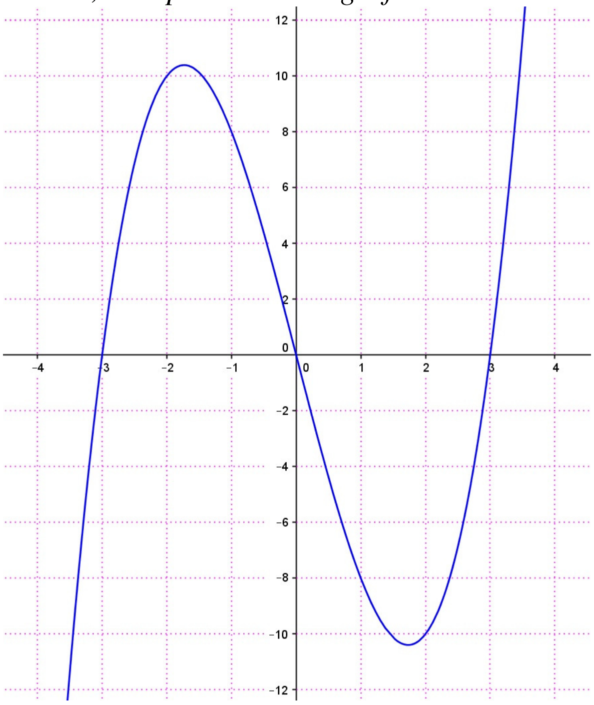
Monotonía: creciente en $\left(-\infty\,,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3}\,,+\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}\right)$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}\right)\approx\left(-1'73\,,10'39\right)$ *hay un máximo relativo y en* $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}\right)\approx\left(1'73\,,-10'39\right)$ *hay un mínimo relativo.*

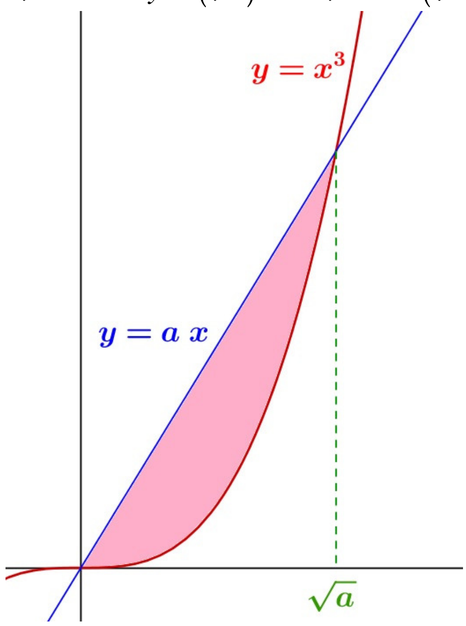
Con esta información, la representación gráfica será:



c) *Área entre* $y = x^3$, $y = a\,x$ ($a > 1$), *en* 1^{er} *cuadrante.*
Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:
$x^3 = a\,x$, *resuelta en el apartado a) "*$x^3 - a\,x = 0$*", las soluciones:* $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$
Como el área a calcular es en el 1^{er} *cuadrante, las soluciones que nos interesan son* $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$.
Los puntos de corte serán: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0^3 = 0 \;\rightarrow\; (\,0\,,0\,)$

$$x = \sqrt{a} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{a}\right)^3 = a\sqrt{a} \;\rightarrow \left(\sqrt{a}\,,a\sqrt{a}\right)$$

La representación gráfica es:



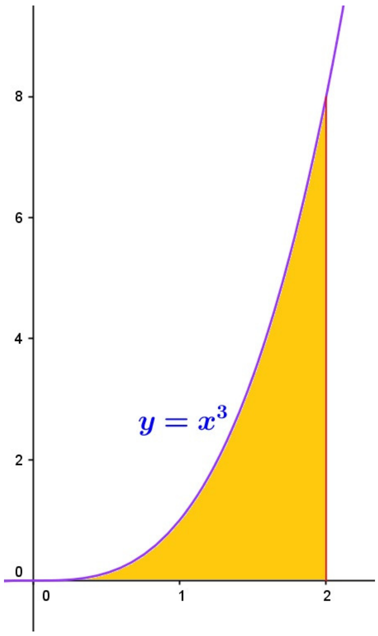
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}}\left(a\,x - x^3\right)dx = \left[a\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} = \left(a\,\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right) - 0 = a\,\frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Finalmente, ***el área de la región pedida es*** $\dfrac{a^2}{4}$ *u.a.*

d) Área entre $y = x^3$, eje OX, $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3\,dx == \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\dfrac{a^2}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad (como\ a > 0) \quad a = 4$

Finalmente, ***el valor del parámetro a buscado es a = 4.***

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. *(2 + 2 puntos)*

b) La justificación de que $A^4 = I$. *(2 puntos)*

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} y A^{100}. *(4 puntos)*

Solución:

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

b) ¿ $A^4 = I$ *?.*

Calculemos A^2, $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Y finalmente, $A^4=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

Por tanto, ***hemos comprobado que*** $\boldsymbol{A^4 = I}$.

c)

$$A^7 = A^4\ A^3 = I\ A^3 = A^3 = A\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{30} = \left(A^4\right)^7\ A^2 = I^7\ A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \left(A^4\right)^{25} = I^{25} = I$$

Por tanto, $\boldsymbol{A^7 = A^{-1}}$, $\boldsymbol{A^{30} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ ***y*** $\boldsymbol{A^{100} = I}$

PROBLEMA B.2. Se dan la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. *(2´5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. *(2´5 puntos)*

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿$r \cap \pi$ para $a = -b = 1$?

Para $a = 1 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, *para* $b = -1 \rightarrow \pi: 2x - y - z = 0$

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 8\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{8}$

Por tanto, $\begin{cases} x = 1 + 4\frac{-1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{8} \\ z = 1 - \frac{-1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases}$

***Solución:* el punto de corte entre r y π es** $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

b) ¿$d(r, \pi)$ para $a = b = 4$?

Para $a = 4 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$, *para* $b = 4 \rightarrow \pi: 2x - y + 4z = 0$

Obtengamos la posición relativa entre r y π.

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - 4\lambda + 4(1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - 4\lambda + 4 - 4\lambda = 0; \quad 6 = 0, \#,$

por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

Entonces $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$, *siendo* P_r *un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo* $P_r(1, 0, 1)$.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

***Solución:* $d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ u.l.**

c) ¿Posición relativa entre r *y* π *en función de* a *y* b*?*

$$r:\begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = a\,\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re \qquad y \qquad \pi : 2x - y + b\,z = 0$$

Sustituyendo los valores de x, y, z *en la ecuación del plano:*

$2(1+4\lambda) - a\lambda + b(1-\lambda) = 0$

$2 + 8\lambda - a\lambda + b - b\lambda = 0$

$2 + b + (8-a-b)\lambda = 0$

$(8-a-b)\lambda = -2-b$

Estudiemos esta ecuación,

Si $8-a-b=0$ *y* $-2-b=0$ *entonces* $r \subset \pi$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 8-a-b=0 \\ -2-b=0 \end{cases}$

De la 2ª ecuación: $\boldsymbol{b=-2}$

Sustituyendo en la 1ª, $8-a+2=0$; $\boldsymbol{a=10}$

Si $8-a-b=0$ *y* $-2-b\neq 0$ *entonces* $r \parallel \pi$

La 2ª condición, $\boldsymbol{b\neq -2}$

De la 1ª condición, $8-a=b \rightarrow \boldsymbol{a+b=8}$

Si $8-a-b\neq 0$ *y* $(-2-b)$ *cualquier valor entonces* r *y* π *se cortan*

De la condición, $\boldsymbol{a+b\neq 8}$

Resumiendo lo anterior:

Si $\boldsymbol{a=10}$ ***y*** $\boldsymbol{b=-2}$ ***la recta*** $\boldsymbol{r}$ ***está contenida en el plano*** $\boldsymbol{\pi}$**.**

Si $\boldsymbol{b\neq -2}$ ***y*** $\boldsymbol{a+b=8}$ ***la recta*** $\boldsymbol{r}$ ***es paralela al plano*** $\boldsymbol{\pi}$**.**

Si $\boldsymbol{a+b\neq 8}$ ***la recta*** $\boldsymbol{r}$ ***y el plano*** $\boldsymbol{\pi}$ ***se cortan.***

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. *(3 puntos)*

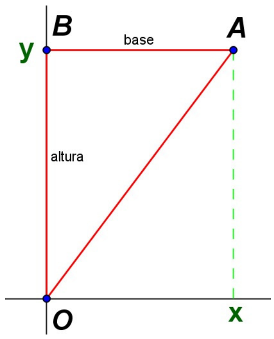
b) El valor de x para el que dicha área es máxima. *(5 puntos)*

c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿ A_T ?

La representación gráfica del triángulo T es:



$$A_T = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{x\,y}{2}$$

Como debemos expresar el área en función de x hay que buscar una relación entre x e y.
Del enunciado sabemos que d (O , A) + d (A , B) = 30 m. Por tanto:

$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 30$, *despejemos y,*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (30 - x)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 900 - 60x + x^2$$

$$y^2 = 900 - 60x \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{900 - 60x} \qquad (y > 0)$$

Para que se pueda calcular el valor de y debe ser $900 - 60\,x > 0 \;\rightarrow\; 60\,x < 900 \;\rightarrow\; x < 15$

Según el enunciado del problema $x > 0$.

Por tanto, $A_T = \dfrac{x\sqrt{900 - 60x}}{2}, \quad 0 < x < 15$

b) ¿x? / área es máxima

$$A'_T = \frac{1}{2}\left(1 \cdot \sqrt{900 - 60x} + x\,\frac{-60}{2\sqrt{900 - 60x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}}\right)$$

$$A'_T = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}} = 0 \quad \rightarrow \quad 900 - 60x - 30x = 0$$

$$900 - 90x = 0 \quad \rightarrow \quad 900 = 90x \quad \rightarrow \quad x = 10$$

Estudiemos el signo de $A_T´$ en el intervalo (0 , 15)

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad A'_T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900 - 60\,.\,1} - \frac{30\,.\,1}{\sqrt{900 - 60\,.\,1}}\right) = 11'75.. > 0$$

$$x = 11 \quad \rightarrow \quad A'_T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900 - 60\,.\,11} - \frac{30\,.\,11}{\sqrt{900 - 60\,.\,11}}\right) = -2'90.. < 0$$

Por lo que:

Por lo tanto en $x = 10$ hay un máximo relativo que además es el absoluto porque la función a la izquierda de 10 es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: para que el área sea máxima x = 10.

c) Para $x = 10$ el valor del área es:

$$A_T(10) = \frac{10\sqrt{900 - 60 \cdot 10}}{2} = 86'6025\ m^2$$

Solución: el valor de dicha área máxima es 86´6025 m^2.