PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2017	CONVOCATORIA: JULIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Siguen A i B dues matrius quadrades d'ordre 3 tals que $A^2 = -A - I$ i $2B^3 = B$, en què $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat. Obteniu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La justificació que la matriu A és invertible (2 *punts*)
   i el càlcul de la matriu A^3 en funció d'A i d'I. (2 *punts*)
b) Els valors possibles del determinant de B. (3 *punts*)
c) El valor del determinant de la matriu B^2, sabent que la matriu B té inversa. (3 *punts*)

Solució: a) $A^2 + A = -I$ implica que $A(-A - I) = I$, llavors A té inversa i, a més, $A^{-1} = -A - I$;
$A^3 = AA^2 = A(-A - I) = AA^{-1} = I$. b) $2^3|B|^3 = |B|$, per això $|B| = 0$ o $|B| = \pm 1/(2\sqrt{2})$. c) $|B|^2 = 1/8$.

Problema A.2. Es donen la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: 2x + y + mz = n.$
Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el pla π es tallen en un punt. (3 *punts*)
b) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el pla π no es tallen. (3,5 *punts*)
c) Els valors d'm i n per als quals la recta r està continguda en el pla π. (3,5 *punts*)

Solució: a) $m \neq -3$ i qualsevol valor de n. b) $m = -3$ i $n \neq 2$. c) $m = -3$ i $n = 2$.

Problema A.3. Es consideren les corbes $y = x^3$, $y = ax$ i la funció $f(x) = x^3 - ax$, en què a és un paràmetre real i $a > 0$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els punts de tall de la corba $y = f(x)$ amb els eixos de coordenades i els intervals
   de creixement i de decreixement de la funció f. (1+2 *punts*)
b) La gràfica de la funció f quan $a = 9$. (3 *punts*)
c) Calculeu, en funció del paràmetre a, l'àrea de la regió fitada del primer quadrant
   tancada entre les corbes $y = x^3$ i $y = ax$, quan $a > 1$. (2 *punts*)
d) El valor del paràmetre a per al qual l'àrea obtinguda en l'apartat c) coincideix amb l'àrea

de la regió fitada compresa entre la corba $y = x^3$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$. (2 *punts*)

Solució: a) $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$; f és creixent en $]-\infty, -\sqrt{a/3}[\cup]\sqrt{a/3}, +\infty[$ i f decreix en $]-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}[$. b) És una funció polinòmica de grau 3 que, a més dels talls indicats amb els eixos, té el màxim relatiu en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ i el mínim relatiu en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. c) $\int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)dx = a^2/4$. d) De $\int_0^2 x^3 dx = 4$ i $a > 1$ es dedueix que $a = 4$. Es proposa qualificar l'obtenció de l'àrea amb una puntuació entre 0 i 1,5 punts, i l'obtenció d' a amb una puntuació entre 0 i 0,5 punts.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La justificació que A té matriu inversa i el càlcul d'aquesta inversa A^{-1}. (2+2 *punts*)

b) La justificació que $A^4 = I$. (2 *punts*)

c) El càlcul de les matrius A^7, A^{30} *i* A^{100}. (4 *punts*)

Solució: a) Es justifica l'existència d'inversa per qualsevol mètode (el mètode de Gauss amb algun comentari hi pot anar bé) i s'obté $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ indicant els passos. b) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^{-1}$ i $A^4 = I$. c) $A^7 = A^{-1}$; $A^{30} = A^2$ i $A^{100} = I$.

Problema B.2. Es donen la recta $r : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ i el pla $\pi : 2x - y + bz = 0$, en què a i b són dos paràmetres reals. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

d) El punt d'intersecció de la recta *r* i el pla π quan $a = -b = 1$. (2,5 *punts*)

e) La distància entre la recta *r* i el pla π quan $a = b = 4$. (2,5 *punts*)

f) La posició relativa de la recta *r* i del pla π en funció dels valors dels paràmetres *a i b*. (5 *punts*)

Solució: a) $(1/2, -1/8, 9/8)$. b) Com que *r* i π són paral·lels es calcula, per exemple, la distància d'un punt d'*r*, per exemple $(1, 0, 1)$, al pla π, que és $6/\sqrt{21}$. c) Són coincidents si $a + b = 8$ i $b = -2$; són paral·leles si $a + b = 8$ i $b \neq -2$; i es tallen en un punt si $a + b \neq 8$.

Problema B.3. Es considera el triangle *T* de vèrtexs $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ i $B = (0, y)$, en què $x > 0$, $y > 0$, i tal que la suma de les longituds dels costats *OA* i *AB* és de 30 metres.
Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) L'àrea del triangle *T* en funció d'*x*. (3 *punts*)

b) El valor d'*x* per al qual aquesta àrea és màxima. (5 *punts*)

c) El valor d'aquesta àrea màxima. (2 *punts*)

Solució: a) $A(x) = \frac{x\sqrt{900 - 60x}}{2}$. b) $x = 10$. c) $A(10) = 50\sqrt{3}$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 *puntos*)
y el cálculo de la matriz A^3. (2 *puntos*)

b) Los valores posibles del determinante de B. (3 *puntos*)

c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 *puntos*)

Solución: a) $A^2 + A = -I$ implica que $A(-A - I) = I$, luego A tiene inversa y, además, $A^{-1} = -A - I$; $A^3 = AA^2 = A(-A - I) = AA^{-1} = I$. b) $2^3|B|^3 = |B|$, por lo que $|B| = 0$ o $|B| = \pm 1/(2\sqrt{2})$. c) $|B|^2 = 1/8$.

Problema A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 *puntos*)

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3,5 *puntos*)

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. (3,5 *puntos*)

Solución: a) $m \neq -3$ y cualquier valor de n. b) $m = -3$ y $n \neq 2$. c) $m = -3$ y $n = 2$.

Problema A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (1+2 *puntos*)

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 *puntos*)

c) Calcular, en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 *puntos*)

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincida con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 *puntos*)

Solución: a) $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$; f es creciente en $]-\infty, -\sqrt{a/3}[\cup]\sqrt{a/3}, +\infty[$ y f decrece en $]-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3}[$. b) Es una función polinómica de grado 3 que, además de los cortes indicados con los ejes,
tiene el máximo relativo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ y el mínimo relativo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. c) $\int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)dx = a^2/4.$

d) De $\int_0^2 x^3 dx = 4$ y $a > 1$ se deduce que $a = 4$. Se propone calificar la obtención del área con una puntuación entre 0 y 1,5 puntos y la obtención de a con una puntuación entre 0 y 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. (2+2 *puntos*)

b) La justificación de que $A^4 = I$. (2 *puntos*)

c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} *y* A^{100}. (4 *puntos*)

Solución: a) Justificar la existencia de inversa por cualquier método (puede servir el método de Gauss con algún comentario) y obtener $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ indicando los pasos. b) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^{-1}$ y $A^4 = I$. c) $A^7 = A^{-1}$; $A^{30} = A^2$ y $A^{100} = I$.

Problema B.2. Se dan la recta $r: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{a} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a=-b=1$. (2,5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a=b=4$. (2,5 *puntos*)

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. (5 *puntos*)

Solución: a) $(1/2,\ -1/8,\ 9/8)$. b) Al ser r y π paralelos se halla, por ejemplo, la distancia de un punto de r, por ejemplo $(1,0,1)$ al plano π, que es $6/\sqrt{21}$. c) Son coincidentes si $a+b=8$ y $b=-2$; son paralelas si $a+b=8$ y $b \neq -2$; se cortan en un punto si $a+b \neq 8$.

Problema B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O=(0,\ 0)$, $A=(x,\ y)$ y $B=(0,\ y)$, siendo $x>0$, $y>0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. (3 *puntos*)

b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 *puntos*)

c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*)

Solución: a) $A(x)=\dfrac{x\sqrt{900-60x}}{2}$. b) $x=10$. c) $A(10)=50\sqrt{3}$.