**PROBLEMA A.1.** Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x+a\,y+2\,z=a \\ 2\,x+a\,y-z=2 \\ a\,x-y+2\,z=a \end{cases}$

dependiente del parámetro real $a$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. *(4 puntos)*

b) Los valores del parámetro $a$ para los que el sistema es compatible y determinado. *(3 puntos)*

c) El valor del parámetro $a$ para el que el sistema es compatible e indeterminado y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de $a$. *(2 + 2 puntos)*

*Solución:*

*En primer lugar estudiamos el sistema y después responderemos las preguntas.*

*La matriz ampliada de este sistema es:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right)$

*A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.*

*A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A es 3.*

*Empezamos estudiando el rango de A*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a-4-a^2-2a^2+1-4a = -3a^2-6a-3$$

$$-3a^2-6a-3=0 \;\rightarrow\; a^2+2a+1=0 \;\rightarrow\; (a+1)^2=0 \;\rightarrow\; a+1=0 \;\rightarrow\; a=-1$$

*Entonces,*

***para*** $\boldsymbol{a \neq -1}$, $|A| \neq 0 \rightarrow$ *ran(A) = 3 y, como el máximo rango de A´ es 3, ran(A´) = 3, por lo que ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Determinado***

***para*** $\boldsymbol{a = -1}$, $|A| = 0 \rightarrow ran(A) \leq 2$

*La matriz ampliada del sistema queda:* $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

*Como* $F_3 = F_1$*, en el estudio del rango de A´ podemos eliminar la fila 3.*

*Quedaría* $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

*Calculemos el rango de A (como A es 2x3, el máximo rango de A será 2),*

$$\left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1+2=3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) \geq 2 \end{array}\right\} \rightarrow\; ran(A)=2$$

*Como el máximo rango de A´ también sería 2 (A´es 2x4)* $\rightarrow$ *ran(A´) = 2*

*Por tanto, ran(A) = ran(A´) = 2 < nº de incógnitas* $\rightarrow$ ***Sistema Compatible Indeterminado.***

*Respondamos a las preguntas,*

*a) Solución para* $a = \mathbf{2}$

*Si* $a = \mathbf{2}$, $a \neq -1$, *por lo que el sistema es compatible determinado*

*El sistema es* $\begin{cases} -x+2\,y+2\,z=2 \\ 2\,x+2\,y-z=2 \\ 2\,x-y+2\,z=2 \end{cases}$ *Como es un S.C.D. lo resolvemos por Cramer.*

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{8-4-4-8-2-8}{-4-4-4-8+1-8}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4+8-4-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4-4+8-8-2-8}{-27}=\frac{-18}{-27}=\frac{2}{3}$$

***Para*** $\mathbf{a = 2}$ ***la solución del sistema es:*** $\{\ x = y = z = \frac{2}{3}\}$

*b) Según lo estudiado al principio* ***el sistema es compatible determinado para*** $\mathbf{a \neq -1}$.

*c) Según lo estudiado al principio* ***el sistema es compatible indeterminado para*** $\mathbf{a = -1}$.

*Del estudio realizado anteriormente, para resolver el sistema usaremos la* $1^a$ *y* $2^a$ *ecuación y como incógnitas principales* $x$ *e* $y$ *(las que determinan el menor de orden dos no nulo).*

*El sistema a resolver es:*

$$\begin{cases} -x-y=-1-2z \\ 2\,x-y=2+z \end{cases} \rightarrow$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -1 \\ 2+z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1+2z+2+z}{3}=\frac{3+3z}{3}=1+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -2+z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{3}=\frac{-2-z+2+4z}{3}=\frac{3z}{3}=z$$

*Finalmente,* ***para*** $\mathbf{a = -1}$ ***las soluciones del sistema son:*** $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

**PROBLEMA A.2.** Se dan el punto P = ( 1 , 1 , 1 ), la recta $r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano π: x + y + z = 1 Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta a *r*. *(2 puntos)*
b) La recta *s* que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta *s* con el plano π. *(2+2+2 puntos)*
c) El plano σ que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano *π*. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿Plano* $\sigma$*? /* $P \in \sigma$ *y* $r \subset \sigma$

*Obtengamos la ecuación paramétrica de r (para tener punto y vector director de r).*

*En la recta r,* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$

*Por tanto resolvemos el sistema:* $r:\begin{cases} x+y=-1+z \\ x+2y=1+z \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+z & 1 \\ 1+z & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-2+2z-1-z}{1} = -3+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{1} = 1+z+1-z = 2$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} P_r(-3\,,2\,,0) \\ \vec{v}_r(1\,,0\,,1) \end{cases}$$

*El punto P ( 1 , 1 , 1 )* $\notin$ *r (segunda coordenada* $\neq 2$*), luego podemos construir el plano pedido.*

$$\sigma:\begin{cases} \text{punto} \quad P(1\,,1\,,1) \\ \text{vectores directores}:\begin{cases} \vec{v}_r(1\,,0\,,1) \\ \overrightarrow{PP_r}(4\,,-1\,,1) \end{cases} \end{cases}$$

*La ecuación general del plano* $\sigma$ *la obtenemos:* $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,.\,1-(y-1)\,.\,(-3)+(z-1)\,.\,(-1)=0$$

$$x-1+3y-3-z+1=0$$

$$x+3y-z-3=0$$

*Solución:* $\boldsymbol{\sigma: x+3y-z-3=0}$

*b)*

*b₁) ¿recta s? / $P \in s$ y $s \perp \pi$*

$$s:\begin{cases} punto \quad P(1,1,1) \\ vector\ \ director, \quad como\ \ s \perp \pi \rightarrow : \vec{v_s} = \vec{n_\pi} = (1,1,1) \end{cases}$$

*La ecuación paramétrica de la recta s será:* $s:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

*b₂) ¿d( P , π )?. P ( 1 , 1 , 1 ) y π: x + y + z = 1 → π: x + y + z − 1 = 0*

$$d(P,\pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \rightarrow \qquad d(P,\pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u.l.$$

*b₃) ¿ $s \cap \pi$?*

*Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano π,*

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 1$

$3 + 3\lambda = 1$ $\qquad\qquad Q = s \cap \pi$

$3\lambda = 1 - 3$

$3\lambda = -2$ $\qquad \rightarrow \qquad Q = \left(1-\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\lambda = \frac{-2}{3}$

*Solución:* $\boldsymbol{s \cap \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

*c) ¿Plano σ? / $r \subset \sigma$ y $\sigma \perp \pi$*

$$\sigma:\begin{cases} punto \quad P_r(-3,2,0) \\ vectores\ \ directores:\begin{cases} r \subset \sigma \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \vec{v_r}(1,0,1) \\ \sigma \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{n_\pi}(1,1,1) \end{cases} \end{cases}$$

*La ecuación general del plano σ la obtenemos:* $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3).(-1) - (y-2).0 + z.1 = 0$

$-x - 3 + z = 0$

$-x + z - 3 = 0$

*Solución:* $\boldsymbol{\sigma: -x + z - 3 = 0}$

**PROBLEMA A.3.** Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$ , $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$ . El cable *MP* tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable *PN* es de 5 €/m. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

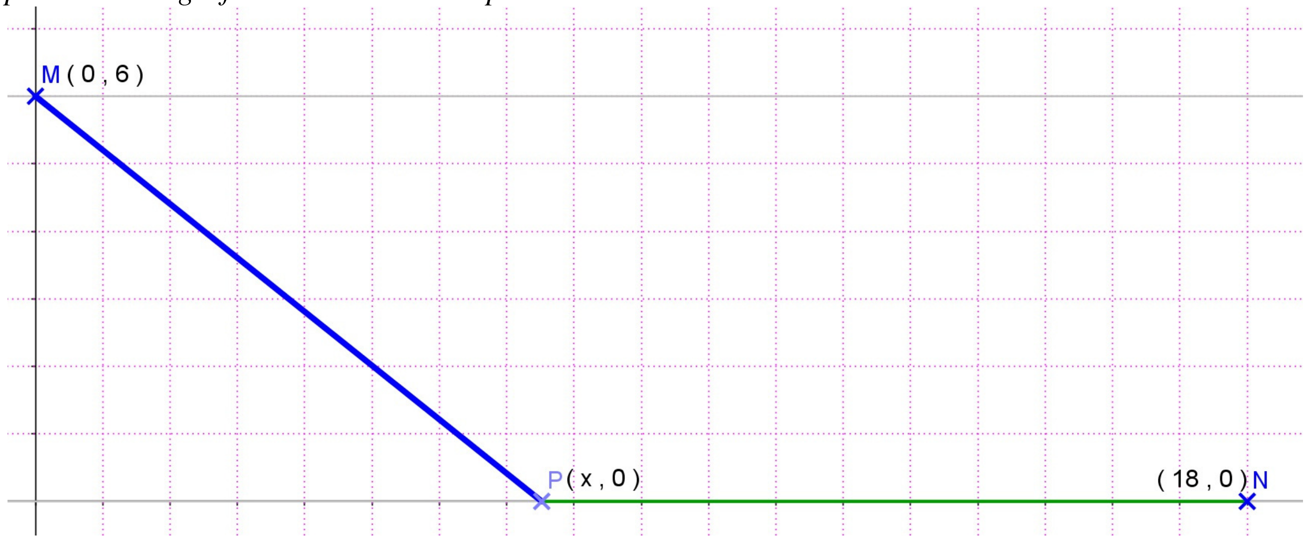
a) El costo total C de los dos cables en función de la abcisa $x$ del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. *(3 puntos)*

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. *(4 puntos)*

c) El valor de dicho costo total mínimo. *(3 puntos)*

*Solución:*

*La representación gráfica de los datos del problema es:*




*a) Coste de los dos cables en función del valor x del punto P.*

*Sabemos que* $0 \le x \le 18$,

$$d(M,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2+36}$$

$$d(P,N) = 18 - x$$

*Por lo que el coste C de los cables será:* $C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x) \qquad 0 \le x \le 18$

*b) Mínimo de C.*

$$C' = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5$$

$$C' = 0 \;\rightarrow\; \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5 = 0 \;\rightarrow\; 10x - 5\sqrt{x^2+36} = 0 \;\rightarrow\; 10x = 5\sqrt{x^2+36}$$

$$(10x)^2 = \left(5\sqrt{x^2+36}\right)^2 \;\rightarrow\; 100\,x^2 = 25(x^2+36) \;\rightarrow\; 100\,x^2 = 25\,x^2 + 900$$

$$100\,x^2 - 25\,x^2 = 900 \;\rightarrow\; 75\,x^2 = 900 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{900}{75} \;\rightarrow\; x^2 = 12 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{12}$$

*Pero como* $0 \le x \le 18$, *entonces* $x = \sqrt{12} \approx 3'4641$

*Para determinar si es mínimo calculemos los valores de C´ a la izquierda y derecha de* $\sqrt{12}$

$$x = 1, \quad C' = \frac{10\,.\,1}{\sqrt{1^2 + 36}} - 5 = \frac{10}{\sqrt{37}} - 5 = -3'3560 < 0$$

$$x = 5, \quad C' = \frac{10\,.\,5}{\sqrt{5^2 + 36}} - 5 = \frac{50}{\sqrt{61}} - 5 = 1'4018 > 0$$

*Hemos obtenido que a la izquierda de* $\sqrt{12}$ *C´ es negativa y a la derecha positiva, por lo que para x =* $\sqrt{12}$ *la función C tiene un mínimo relativo que además es el absoluto porque C es decreciente a la izquierda de* $\sqrt{12}$ *y creciente a la derecha.*

*Por tanto,* ***el coste total C es mínimo para x =*** $\sqrt{12}$ ***m ≈3´4641 m.***

*c) El valor del coste total mínimo será:*

$$C = 10\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 10\sqrt{12 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 141'9615$$

*Por lo que,* ***el coste total mínimo es de 141´96 €.***

**PROBLEMA B.1.** Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $I$ la matriz identidad de orden 3 x 3, *(2,5 puntos)*
y el valor de la matriz $C^4$. *(2,5 puntos)*

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que $A$ es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale $-1$. *(3 puntos)*

c) La matriz $B$ que admite inversa y que verifica la igualdad $B\,B = B$. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a) Comprobemos que $C^2 = 2C - I$.*

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5-4.2-2..4 & -5.4+4.1+2.4 & 5.2-4.1-2.1 \\ 2.5-1.2-1.4 & -2.4+1.1+1.4 & 2.2-1.1-1.1 \\ -4.5+4.2+1.4 & 4.4-4.1-1.4 & -4.2+4.1+1.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

*Obtenemos el mismo resultado; por lo tanto queda comprobado que* $\boldsymbol{C^2 = 2C - I}$.

*Calculemos $C^4$,*

$C^4 = C^2 \,.\, C^2 = (2C - I)\,.\,(2C - I) = 2C\,2C - 2C\,I - I\,2C + I^2 = 4C^2 - 2C - 2C + I =$
$= 4C^2 - 4C + I = 4(2C - I) - 4C + I = 8C - 4I - 4C + I = 4C - 3I =$

$$4C - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

*Luego,* $C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

*b)* $/A/ = -1$ *y* $A$ *es 4x4*

*Calculemos* $\left| (3A^4)(4A^2)^{-1} \right|$

*Considerando las propiedades de los determinantes:*

$|A\,B| = |A|\,|B|, \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \quad y \quad |n\,A| = n^4\,|A| \quad (por\ ser\ A\ \ 4x4)$

$$\left| \left(3\ A^4\right)\left(4\ A^2\right)^{-1} \right| = \left|3\ A^4\right| \left|\left(4\ A^2\right)^{-1}\right| = 3^4\ \left|A^4\right| \frac{1}{\left|\left(4\ A^2\right)\right|} = 3^4\ \left|A\right|^4\ \frac{1}{4^4\ \left|A^2\right|} = 81\,.\left(-1\right)^4\ \ \frac{1}{256\ \left|A^2\right|} = \frac{81}{256\ \left|A\right|^2} =$$

$$= \frac{81}{256\ \left(-1\right)^2} = \frac{81}{256}$$

***Solución:*** $\left| \left(3\ A^4\right)\left(4\ A^2\right)^{-1} \right| = \frac{81}{256}$**.**

*c) ¿ matriz B ? / existe* $B^{-1}$ *y* $B\,B = B$

*Partimos de* $B\,B = B$, *como existe* $B^{-1}$ *multiplicamos la igualdad por* $B^{-1}$ *por la izquierda,*

$B^{-1}\,B\,B = B^{-1}\,B$

$I\,B = I$

$B = I$

***Solución: B = I ( B es la matriz identidad).***

**PROBLEMA B.2.** Sea T un tetraedro de vértices O = (0,0,0), $A$ = (1,1,1), $B$ = (3,0,0) y $C$ = (0,3,0).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano $\pi$ que contiene a los puntos *A, B y C,* *(1 punto)* y las ecuaciones de la recta $h_0$ perpendicular a $\pi$ que pasa por O. *(2 puntos)*

b) El punto de intersección de la altura $h_0$ y el plano $\pi$. *(3 puntos)*

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos *A, B y C*, *(2 puntos)* y el volumen del tetraedro *T*. *(2 puntos)*

*Solución:*

*a) ¿plano $\pi$ que pasa por los puntos A(1,1,1), B(3,0,0) y C(0,3,0)?*

*Del plano $\pi$ conocemos* $\begin{cases} \text{punto} \quad A(1,1,1) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}(-1,2,1) \end{cases} \end{cases}$

*La ecuación del plano $\pi$ será:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,3 - (y-1)\,(-3) + (z-1)\,3 = 0$$

$$3x-3+3y-3+3z-3=0 \quad \rightarrow \quad 3x+3y+3z-9=0 \quad \rightarrow \quad x+y+z-3=0$$

*Por tanto,* $\boldsymbol{\pi :\ x + y + z - 3 = 0}$

*Recta $h_0$ / $O \in h_0$ y $h_0 \perp \pi$:*

$$h_0 : \begin{cases} \text{Punto} \quad O(0,0,0) \\ \text{vector director, como } h_0 \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{h_0} = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases}$$

*Ecuaciones de $h_0$:*

*Ecuación vectorial:* $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow$

$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re$

*Ecuación paramétrica:* $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

*Ecuación continua:* $x = y = z$

*b) ¿ $h_0 \cap \pi$ ?*

*Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta paramétrica en la ecuación del plano,*

$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda = 3; \quad \lambda = 1$

*El punto de corte entre la recta $h_0$ y el plano $\pi$ es ( 1 , 1 , 1 )* *c) Área de la cara de vértices A, B y C*

*Como es un tetraedro su cara es un triángulo de vértices A, B y C y calculamos su área mediante la fórmula: ( los vectores a usar los calculamos en el apartado a) )*

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\left|\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (3,3,3)$$

$$\left|\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ \right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\,3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ u.a.$$

***Solución: el área de la cara pedida es*** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ***u.a.***

*El volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:*

*a) Mediante la fórmula:* $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\ \left[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}\right]\right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{OB} = (3,0,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0,3,0) \end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\ \left[\overrightarrow{OA}\ \ \overrightarrow{OB}\ \ \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|9| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}u^3$$

*b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π, y la altura del tetraedro, que estaría sobre la recta que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π (la recta $h_0$ obtenida en el apartado a)); por tanto la altura del tetraedro es la distancia entre los puntos O (0,0,0) y el obtenido en el apartado b) P (1,1,1).*

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\acute{A}rea\_base\ .\ h = \frac{1}{3}A_{tri\acute{a}gulo\ A,B,C}\ d(P,O) \overset{*}{=}$$

$$A_{tri\acute{a}gulo\ A,B,C} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (del\ apartado\ anterior)$$

$$d(P,O) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\sqrt{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}u^3$$

***Solución: El área de tetraedro pedido es*** $\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{u^3}$***.***

**PROBLEMA B.3.** Dada la función $f$ definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f$, *(2 puntos)* y los extremos relativos de la función $f$. *(1 punto)*

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. *(3 puntos)*

c) El área de la región plana limitada por la curva $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1 \le x \le e$, el segmento que une los puntos (1,0) y ($e$,0), y las rectas $x = 1$ y $x = e$. *(4 puntos)*

*Solución:*

*a) Monotonía de f(x).*

*Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = $\Re \sim \{0\}$.*

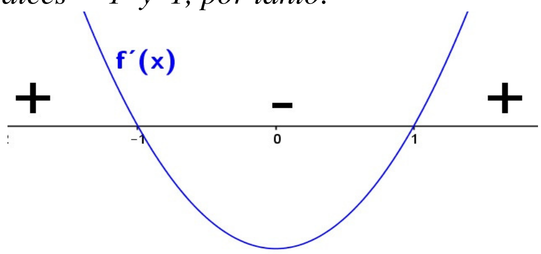
$$f'(x)=\frac{2x\,x-1(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

*Obtengamos las raíces del numerador y denominador:*

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

$$x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

*f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de segundo grado con coeficiente de $x^2$ positivo y raíces – 1 y 1, por tanto:*




*Por tanto,* ***f(x) es creciente en ( – ∞, – 1 ) ∪ ( 1 , + ∞ ) y decreciente en ( – 1, 1 ).***

*Del estudio anterior obtenemos que f(x) tiene un máximo relativo en x = – 1 y un mínimo relativo en x = 1.*

$$\text{Para} \quad x=-1 \quad\rightarrow\quad f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$\text{Para} \quad x=1 \quad\rightarrow\quad f(1)=\frac{1^2+1}{1}=\frac{2}{1}=2$$

*Entonces,* ***f(x) tiene un máximo relativo en ( – 1 , – 2 ) y un mínimo relativo en ( 1 , 2 ).***

*b) ¿Asíntotas de* $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ *?*

*Asíntota vertical,*

*Posible A.V. x = 0*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \quad es\ A.V.$$

*Asíntota horizontal,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty \quad\rightarrow\quad \text{No tiene asíntota horizontal.}$$

*Asíntota oblicua,*

*Como la función es un cociente de polinomios y grad (numerador) – grad (denominador) = 2 – 1 = 1 la función tiene asíntota oblicua y la obtenemos efectuando la división polinómica:*

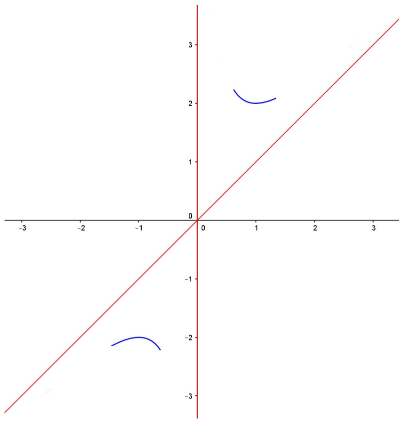
$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \underline{-x^2} & x \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad y = x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

*Finalmente,* ***la curva tiene x = 0 como asíntota vertical e y = x como asíntota oblicua.***

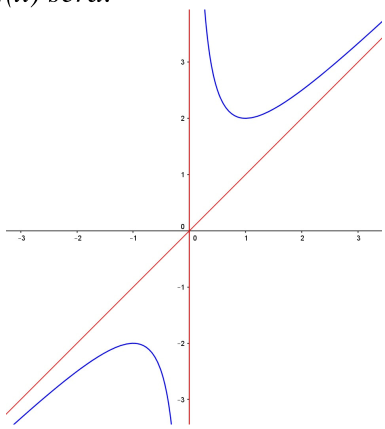
*c) ¿Área de la región plana?*

*De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función f(x),*

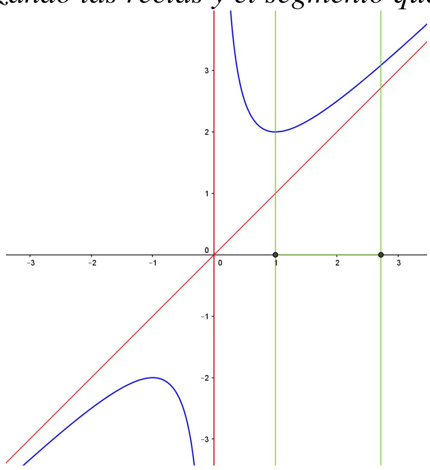
*Sabemos*



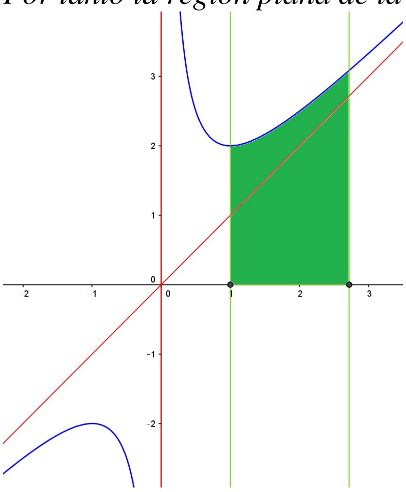
*Por tanto, f(x) será:*



*Trazando las rectas y el segmento que delimitan la región:*



*Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:*



*El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida:* $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx$

*Calculemos la integral indefinida,*

$$\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + Ln\,|x| + C$$

*Luego,* $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx = \left[ \frac{x^2}{2} + Ln\,|x| \right]_1^e = \left( \frac{e^2}{2} + Ln\,|e| \right) - \left( \frac{1^2}{2} + Ln\,|1| \right) =$

$$= \left( \frac{e^2}{2} + 1 \right) - \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \approx 4{'}1945$$

**Solución: el valor del área pedida es** $\left( \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) u^2 \approx$ **4´1945 u²**.